La paradoja de Banach-Tarski: como construir el sol a partir de un guisante

por

Marta Macho Stadler, Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea, *mtpmastm@lg.ehu.es*

Introducción

La *paradoja de Banach–Tarski* es una de las más sorprendentes consecuencias del *axioma de elección*, y afirma:

es posible (teóricamente) cortar un guisante en un número finito de trozos y reajustarlos (utilizando únicamente rotaciones y traslaciones, sin deformar ninguno de ellos) hasta obtener una bola del tamaño del Sol.

¡Pero, ésto es absurdo!

Si tenemos dos bolas B_r y B_R, un guisante y el Sol respectivamente, de radios r y R diferentes (¡R mucho mayor que r!), el enunciado anterior asegura que podemos cortar el guisante B_r en una familia finita de conjuntos dos a dos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$, y reajustándolos y agrupándolos convenientemente, conseguiremos construir el Sol B_R.

El caracter paradójico de esta afirmación se debe, sobre todo, a su *aparente* incompatibilidad con la noción de volumen. En efecto, todos estamos de acuerdo en que el volumen es finitamente aditivo e invariante bajo los movimientos rígidos en el espacio. Entonces, el argumento para refutar el anunciado de Banach–Tarski es realmente sencillo: los volúmenes de B_r y B_R están dados por las expresiones

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{y} \quad \frac{4}{3}\pi R^3,$$

respectivamente. Y así tenemos las igualdades

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \mathrm{Vol}(B_r) = \mathrm{Vol}(A_1) + \ldots + \mathrm{Vol}(A_n) = \mathrm{Vol}(B_R) = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

que es claramente absurdo.

¡Qué fácil ha sido rebatir este enunciado!... sólo hemos necesitado propiedades evidentes de volúmenes de objetos en $\mathbb{R}^3$. Y el argumento ha sido tan elemental...

Pero hay algo que *hemos supuesto* en nuestro argumento:

todo objeto de dimensión tres tiene volumen...

ésto no es cierto... y si uno de nuestros objetos no tiene volumen, la cadena de igualdades anterior ya no tiene sentido... y por lo tanto, no existe la contradicción...

Efectivamente, el razonamiento anterior no es válido, porque los trozos obtenidos en la descomposición (lo veremos más adelante) tienen una forma tan extraña, que no puede siquiera hablarse de su volumen. Son conjuntos denominados *no medibles*: las funciones que habría que integrar para determinar su volumen no son integrables, ni en el sentido clásico de Riemann, ni en el sentido generalizado de Lebesgue.

Para aclarar estos conceptos, por ejemplo, la función característica de los racionales es integrable en el sentido de Lebesgue y su integral vale 0, aunque no es integrable en el sentido de Riemann. Un ejemplo de función no integrable (*¡existe!*), sería una aplicación que toma todos los valores reales en cualquier intervalo (no reducido a un punto), por muy pequeño que sea.

Este género de *monstruos* (que algunas escuelas como las de Brouwer, Borel, Kronecker, Poincaré,... estuvieron tentadas de eliminar) abundan en matemáticas...

La rana que pretendía igualarse a un buey

Para quitar un poco de aspereza a este asunto, os propongo leer esta preciosa fábula de Jean La Fontaine *"La Grenouille qui veut se faire aussi grosse que le Boeuf"*, (fábula 3, libro I de "Fables choisies et mises en vers", 1668), en la traducción de Bernardo María de la Calzada e ilustrada con tanta maestría por el genial *Gustave Doré*

Una rana vió a un Buey: su corpulencia

la causó complecencia.

La tal Rana, que no era como un huevo,

envidiosa y absorta de mirarle,

se imaginó igualarle:

Empezó a hincharse, ¡caso raro y nuevo!

con fuerza desmedida,

diciéndole a otra rana:

– Mírame bien, hermana,

¿me falta mucho? ¿Soy ya tan crecida?

– Todavía no. – ¿Qué tal? – Aún no le llegas.

– Ahora juzgo que sí. – Por más que bregas

aún estás muy distante.

Ello es que el orgulloso animalejo,

siguiendo la manía, tan tirante

llegó a poner su mísero pellejo,

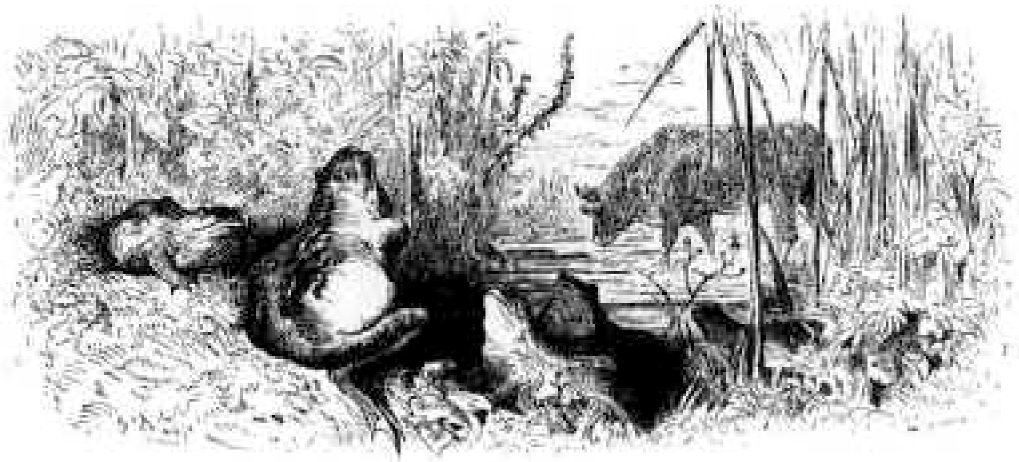
que por fin reventó de allí a un instante.

Hay en el mundo una plaga

de gentes, que, desnudas de prudencia,

remedan semejante competencia.

La rana no consiguió su propósito porque, por desdicha, no conocía la *paradoja de Banach–Tarski*...



6.1 El axioma de elección

La paradoja de Banach–Tarski no puede demostrarse sin el axioma de elección. Este axioma se utiliza más o menos en todas partes en matemáticas:

- para mostrar que una unión numerable de conjuntos numerables es numerable;
- para probar que todo anillo con unidad tiene un ideal maximal;
- para verificar que todo orden parcial puede extenderse a un orden total;
- para demostrar que todo espacio vectorial admite una base;
- para asentar el *teorema de Tychonoff*: el producto de espacios compactos es compacto;
- para evidenciar el *teorema de Hahn–Banach*;
- para acreditar que existen conjuntos de números reales que no son medibles en el sentido de Lebesgue.

Muchas de sus consecuencias son *terriblemente molestas*, como la paradoja de Banach–Tarski.

Algunas formulaciones del axioma de elección

El axioma de elección se utiliza en todas las áreas de las matemáticas, y se presenta de muy diversas maneras. Damos a continuación algunas de sus caracterizaciones:

• *Axioma de elección:* Si X es un conjunto no vacío, existe una función "de elección" $F\colon \mathcal{P}(X) - \emptyset \longrightarrow X$ tal que para todo $A \subset X$, es $F(A) \in A$, es decir, F "elige" un elemento de A.

• *Principio multiplicativo*: Si A es una función con dominio I y $A_i = A(i) \neq \emptyset$, entonces $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

• *Principio de Zermelo*: Si $\mathcal{P}$ es una partición de un conjunto A, existe $B \subseteq A$ tal que para todo $M \in \mathcal{P}$, $B \cap M$ tiene un único elemento.

• *Principio de enumeración*: Para todo conjunto A existe un número ordinal α y una función biyectiva entre ellos.

• *Principio de buen orden*: Todo conjunto puede bien ordenarse.

• *Lema de Zorn*: Si A es un conjunto parcialmente ordenado por R y todo subconjunto de A totalmente ordenado por R tiene una cota superior en A, entonces A tiene un elemento maximal.

• *Principio de Kuratowski*: Si R es un orden parcial y $S \subseteq R$ es un orden total, entonces hay un orden total $\subseteq$-maximal T, tal que $S \subseteq T \subseteq R$.

• *Principio de tricotomía*: Dados dos conjuntos A y B, existe una función inyectiva de A en B o existe una función inyectiva de B en A (equivalentemente, un número es positivo, negativo o nulo).

• *Principio de la imagen inversa*: Dados dos conjuntos no vacíos A y B, existe una función sobreyectiva de A en B o existe una función sobreyectiva de B en A.

En 1938, Kurt Gödel prueba que el axioma de elección es consistente con los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo–Fränkel. Además, tras la prueba de Paul Joseph Cohen en 1963 de que su negación es también coherente con estos principios, el axioma de elección ha provocado una discusión fundamental en el mundo de las matemáticas.

Los axiomas de Zermelo–Fränkel

Los nueve axiomas de Zermelo–Fränkel están ligados entre sí. Pero, el axioma de elección es independiente de éstos. A continuación, damos la lista de estos nueve axiomas:

Axioma de extensionalidad: Si todo elemento de X es un elemento de Y y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces X es igual a Y.

Axioma del conjunto vacío: Existe un conjunto que no contiene ningún elemento, el conjunto vacío $\emptyset$.

Axioma de separación: Si P es una propiedad referente a los elementos de un conjunto X, entonces existe un conjunto Y cuyos elementos son aquellos elementos de X que verifican P.

Axioma de pares: Dados dos conjuntos X e Y, existe un conjunto cuyos únicos elementos son X e Y.

Axioma de uniones: Si X es un conjunto, existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de X.

Axioma del conjunto potencia: Si X es un conjunto, existe el conjunto de todos los subconjuntos de X, su conjunto potencia.

Axioma de regularidad: Todo conjunto no vacío contiene un elemento con el que no comparte ningún elemento.

Axioma del conjunto infinito: Existe un conjunto que tiene infinitos elementos.

Axioma de reemplazo: Si $\psi(x, y)$ es una función proposicional y A es un conjunto, existe el conjunto de los elementos b que verifican $\psi(a, b)$ para algún $a \in A$.

6.2 Demostración de la paradoja

Empezamos por recordar algunas definiciones sobre acciones de grupos.

Definición 6.1 Un grupo G *opera* sobre un conjunto X si existe una aplicación $\Phi: G \times X \longrightarrow X$, denotada $\Phi(g, x) = gx$, tal que

(i) $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$ para $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$,

(ii) $1x = x$, siendo 1 el neutro de G.

Podemos considerar la relación de equivalencia en X,

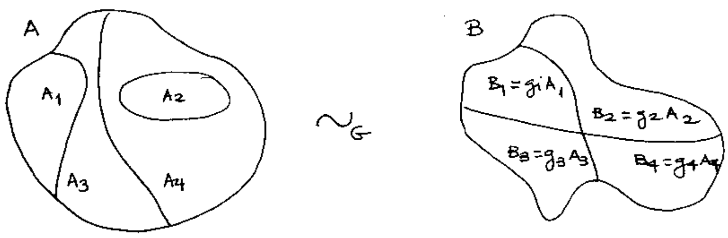
$$xRy \quad \text{si y sólo si existe } g \in G \text{ tal que } gx = y.$$

La clase de equivalencia de un punto $x \in X$ es la *órbita* de x, $G(x)$. El conjunto de las órbitas constituye una partición de X.

La noción clave en todo lo que sigue es

Definición 6.2 $A, B \subset X$ son *equivalentes (por descomposición) bajo la acción de* G, $A \sim_G B$, si existen $n \in \mathbb{N}$ y dos familias de subconjuntos dos a dos disjuntos, $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A y $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de B y elementos $g_1, \ldots, g_n \in G$, tales que para $i \in \{1, \ldots, n\}$, es

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad \text{y} \quad B_i = g_i A_i.$$



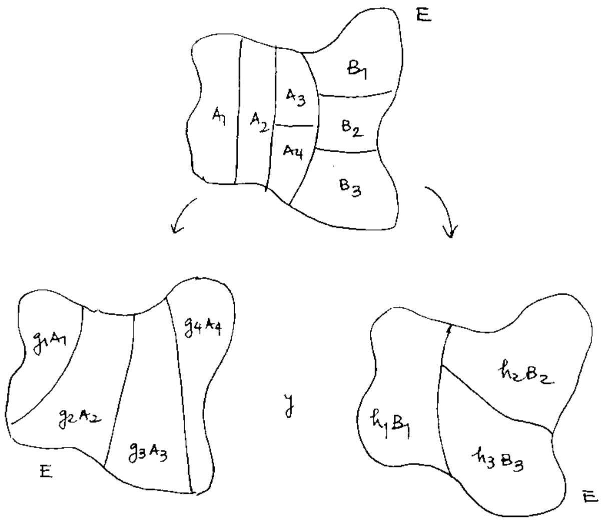
Teorema 6.3 *La "equivalencia (por descomposición)" entre partes de X es una relación de equivalencia.*

Teorema 6.4 *Sean $\{A_1, \ldots, A_n\}$ y $\{B_1, \ldots, B_n\}$ subconjuntos de X dos a dos disjuntos. Si A_i y B_i son equivalentes (por descomposición) para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ y $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ también lo son.*

El tipo de conjuntos con el que vamos a trabajar se define a continuación

Definición 6.5 Se dice que $E \subset X$ es *paradójico* bajo la acción de G, si existen partes complementarias A y B de E tales que $A \sim_G E \sim_G B$.
Es decir, existen dos familias de subconjuntos dos a dos disjuntos, $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A y $\{B_1, \ldots, B_m\}$ de B y elementos $g_1, \ldots, g_n \in G$, $h_1, \ldots, h_m \in G$, tales que para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$ es

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j).$$



Teorema 6.6 *Si E y F son equivalentes en X y E es paradójico, entonces F es paradójico.*

Intuitivamente, si E es un conjunto paradójico se pueden construir dos ejemplares de E a partir de E. Esta operación se puede repetir y podemos pues fabricar con un conjunto paradójico tantos ejemplares de este conjunto como se desee, lo que refuerza el caracter paradójico de este fenómeno. Cuando se habla de "varios ejemplares" de E, es una manera de hablar pues, en general, no se pueden definir concretamente.

Corolario 6.7 *Si E es paradójico, para cada $n \geq 2$ existen subconjuntos de E dos a dos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$ cuya unión es E y que son todos equivalentes a E.*

La noción de conjunto paradójico depende evidentemente del grupo de operadores G usado. Si se reemplaza G por un grupo G' mayor, operando igualmente sobre X, por medio de una ley que prolonga la de G sobre X, se obtienen (a priori) en X más conjuntos equivalentes, por lo tanto más conjuntos paradójicos.

Dado un grupo G y $a, b \in G$, una sucesión $(g_1, \ldots, g_n)$ de elementos de G, todos iguales a a, b, a^{-1} y b^{-1}, se llama una *palabra* con respecto a las cuatro *letras* a, b, a^{-1} y b^{-1}.

El número n de elementos en esta sucesión se llama *longitud* de la palabra; si $n = 0$ se dice que la palabra es *vacía*. No hay que confundir la palabra $(g_1, \ldots, g_n)$

con el producto $g_1 \dots g_n$ que se le puede asociar en G.

Una tal palabra $(g_1, \dots, g_n)$ se dice *reducida* si $g_i g_{i+1} \neq 1$ para cada $i < n$; de otro modo, si en esta sucesión no hay dos términos consecutivos inversos el uno del otro (a, a^{-1}), (a^{-1}, a), (b, b^{-1}) ó (b^{-1}, b).

Definición 6.8 En las anteriores condiciones, $a, b \in G$ son *independientes* si los elementos a, b, a^{-1} y b^{-1} son todos distintos y para cada palabra con respecto a estas cuatro letras, es imposible tener

$$g_1 \dots g_n = 1 \quad \text{si} \quad g_i g_{i+1} \neq 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq i < n \geq 0.$$

De otro modo, dada una palabra reducida $(g_1, \dots, g_n)$, no se puede tener $g_1 \dots g_n = 1$ salvo si la palabra es vacía. En particular, no se puede tener $ab = ba$ (sino sería $aba^{-1}b^{-1} = 1$), y por lo tanto G es no abeliano.

Definición 6.9 En las condiciones de la definición 6.8, el grupo H generado por a y b se suele llamar grupo (no abeliano) *libre de rango 2*.

Un grupo cualquiera opera sobre sí mismo a izquierda por multiplicación, es decir, para la ley $(g, h) \to gh$ de G sobre sí mismo. Y, todo subgrupo H de G opera sobre G de la misma manera. Se puede entonces predecir en G la existencia de conjuntos equivalentes (por descomposición) y de conjuntos paradójicos para estas diversas leyes de operación.

Definición 6.10 Un grupo G es *paradójico* si es paradójico bajo la anterior acción.

Un grupo puede operar de muy diversas maneras sobre un conjunto, vamos a destacar dos de las más importantes

Definición 6.11 G opera

(i) *libremente* sobre X, si para cada $g \neq 1$ en G y todo $x \in X$ es $gx \neq x$;

(ii) *transitivamente* sobre X, si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Es decir, hay una única órbita, igual a X. Un grupo G opera siempre de manera transitiva sobre cada órbita.

Ejemplos 6.12 Sea G el grupo de rotaciones del plano alrededor del origen de coordenadas.

(i) G no opera ni libre ni transitivamente sobre $\mathbb{R}^2$, por un lado porque el origen es un punto fijo para cualquier rotación de G y por otro lado, porque dos puntos

x e y que no están a la misma distancia del origen no pueden transformarse el uno en el otro por una rotación centrada en el origen;

(ii) G opera libremente (pero no transitivamente) sobre el plano privado del origen;

(iii) G opera libre y transitivamente sobre un círculo dado de centro el origen;

(iv) G opera transitivamente (pero no libremente) sobre el conjunto de las rectas pasando por el origen.

Teorema 6.13 *Si un grupo G es paradójico y opera libremente sobre un conjunto X, entonces X es paradójico bajo la acción de G.*

Corolario 6.14 *Un grupo G que contiene un subgrupo H paradójico es también paradójico.*

Corolario 6.15 *Un grupo libre de rango 2 es paradójico.*

El caso de $\mathbb{R}^3$

¿Existen en $\mathbb{R}^m$ conjuntos paradójicos? La respuesta es que si, basta con tomar el conjunto vacío, respuesta que evidentemente no tiene interés. Pero, ¿se puede afirmar que un guisante o una rana sean conjuntos paradójicos?

Empecemos por el caso de la recta, donde se prueba fácilmente

Teorema 6.16 *Todo intervalo acotado de $\mathbb{R}$ con al menos dos puntos es paradójico en $\mathbb{R}$ bajo la acción del grupo de las simetrías.*

¿Qué sucede en el plano? Sea el grupo de las similitudes de $\mathbb{R}^2$ (es decir, de las transformaciones que se obtienen al componer las isometrías del plano y las homotecias de razón no nula), se cumple:

Teorema 6.17 *Un polígono del plano es paradójico bajo la acción del grupo de similitudes.*

Evidentemente, el uso exclusivo del grupo de isometrías sería más espectacular, es el ejemplo que vamos a ver ahora: un conjunto que resulta idéntico a cada una de sus dos mitades en el plano. Consideremos para ello la identificación de $\mathbb{R}^2$ con el plano complejo $\mathbb{C}$, y consideremos

(i) la traslación t, $t(z) = z + 1$,

(ii) la rotación $r, r(z) = uz$, donde $u = e^{i\theta}$ con θ ángulo de rotación alrededor del origen.

Sea S el conjunto de las isometrías de $\mathbb{C}$ que se obtienen al componer un número cualquiera de veces y en cualquier orden t y r. Se prueba entonces (ver [3]) el siguiente resultado

Teorema 6.18 (**Mazurkiewicz–Sierpinski**) *Si u es un número transcendente de módulo 1, el conjunto*

$$E = \{a_0 + a_1 u + \ldots + a_n u^n : a_i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

es paradójico.

Observar que E es numerable (porque S lo es), no acotado (pues $\mathbb{N} \subset E$) y tiene medida de Lebesgue nula, al ser numerable. El caracter paradójico de E no está pues aquí en contradicción con la noción de medida (o de área).

Lo importante en la prueba del teorema de Mazurkiewicz–Sierpinski es que se utilizan de manera esencial las propiedades de S y sobre todo de sus generadores t y r, que son independientes (es decir, $tv \neq rw$ para cualesquiera v, w).

La prueba de la paradoja de Banach–Tarski, en la que nos vamos a centrar, usa fenómenos similares para el grupo de las isometrías del espacio.

Vamos a empezar por recordar algunas definiciones

Definición 6.19 Una *isometría* de $\mathbb{R}^3$ es una biyección f de $\mathbb{R}^3$ sobre sí mismo que preserva las distancias, es decir, usando la norma euclídea, se tiene

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \quad \text{para cada} \quad x, y \in \mathbb{R}^3.$$

El conjunto G_3 de las isometrías de $\mathbb{R}^3$ constituye un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^3$, es decir, tenemos la acción $G_3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $(f, x) \to f(x)$.

Una isometría f puede definirse por su matriz A respecto a la base canónica.

Las isometrías que dejan invariante el origen de coordenadas son particularmente interesantes: son aplicaciones lineales (biyectivas), que conservan la norma $\|f(x)\| = \|x\|$ y el producto escalar $\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle$. Se denominan *transformaciones ortogonales* de $\mathbb{R}^3$ y son aquellas cuya matriz asociada verifica la igualdad ${}^tA = A^{-1}$ (es una *matriz ortogonal* de orden 3): su determinante es ± 1. Forman un subgrupo O_3 del grupo de las isometrías G_3 de $\mathbb{R}^3$: es el *grupo ortogonal* de $\mathbb{R}^3$.

Las matrices ortogonales de determinante 1 corresponden a las rotaciones del espacio alrededor de un eje pasando por el origen. Forman un subgrupo de O_3, el *grupo ortogonal especial* SO_3. Cada rotación del espacio distinta de la identidad puede caracterizarse por un eje y un ángulo, que se determina en la práctica en un plano perpendicular al eje. La identidad puede considerarse naturalmente como una rotación de ángulo 0 alrededor de un eje arbitrario.

Teorema 6.20 *El grupo SO_3 posee dos elementos independientes.*

Demostración: En efecto, sean r la rotación de ángulo $arccos(\frac{1}{3})$ alrededor del eje OZ y s la rotación de ángulo $arccos(\frac{1}{3})$ alrededor del eje OX, ambas con centro en el origen de coordenadas.

Se escriben de manera matricial del modo:

$$r^{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

donde aparecen representadas las rotaciones y sus inversas con la notación obvia. Estas dos rotaciones son independientes y generan por lo tanto un grupo libre no abeliano de rango dos, G (obviamente numerable). Q.E.D.

Aunque se deduce directamente del corolario 6.15, por su interés en lo que sigue vamos a probar

Teorema 6.21 *El grupo G (y por lo tanto SO_3) es paradójico.*

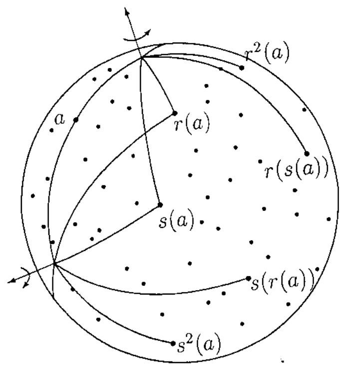
Demostración: Si notamos A' el conjunto de todos los elementos que empiezan por r (de hecho, r es la última rotación que se realiza), A'' el conjunto de los que comienzan por r^{-1}, B' el conjunto de los que comienzan por s y B'' el conjunto de los que comienzan por s^{-1}, entonces es claro que

$$G = A' \cup A'' \cup B' \cup B'' \cup \{1\} = r^{-1}A' \cup A'' = s^{-1}B' \cup B''.$$

Q.E.D.

Lamentablemente, no se puede transferir fácilmente este caracter “paradójico” al espacio, ya que ni G ni SO_3 operan libremente sobre $\mathbb{R}^3$, al tener toda rotación alrededor del origen una infinidad de puntos fijos.

Pero, como G es un grupo de rotaciones de ejes pasando por el origen, opera también sobre la esfera unidad $\mathbb{S}^2$.



Una rotación θ diferente de la identidad admite dos puntos fijos $a_\theta, b_\theta \in \mathbb{S}^2$. Sea

$$D = \{a_\theta, b_\theta : \theta \in G, \theta \neq id\},$$

el conjunto de los puntos fijos en $\mathbb{S}^2$ por elementos de G diferentes de la identidad. Como G es numerable, D también lo es, y se prueba fácilmente

Lema 6.22 *Sea $F\colon G \longrightarrow G(x)$ la aplicación definida por $F(g) = gx$.*

- *Si $x \notin D$, F es biyectiva, y*
- *si $x \in D$, F es sólo sobreyectiva.*

Sea $\mathcal{O}$ el conjunto de todas las órbitas en $\mathbb{S}^2 - D$ bajo la acción de G,

$$\mathcal{O} = \{G(x) : x \in \mathbb{S}^2 - D\}.$$

Consideremos $\mathcal{O}_\sharp$ un conjunto que contiene (¡*elige*!) un elemento y sólo uno de cada $G(x) \in \mathcal{O}$, es decir, contiene un elemento de cada G-órbita en $\mathbb{S}^2 - D$. Observar que estamos utilizando aquí el *axioma de elección*. Sea ahora

$$A'_\sharp = A'(\mathcal{O}_\sharp) = \{gx : g \in A' \text{ y } x \in \mathcal{O}_\sharp\}.$$

Igualmente, se definen

$$A''_\sharp = A''(\mathcal{O}_\sharp), \quad B'_\sharp = B'(\mathcal{O}_\sharp) \quad \text{y} \quad B''_\sharp = B''(\mathcal{O}_\sharp).$$

En primer lugar, $A'_\sharp$, $A''_\sharp$, $B'_\sharp$ y $B''_\sharp$ son dos a dos disjuntos porque A', A'', B' y B'' lo son, por el lema 6.22, y porque dos elementos distintos de $\mathcal{O}_\sharp$ están en órbitas disjuntas. Definimos entonces

$$A_\sharp = A'_\sharp \cup A''_\sharp, \quad B_\sharp = B'_\sharp \cup B''_\sharp;$$

y se deduce trivialmente que $A_\sharp \cap B_\sharp = \emptyset$. Sin embargo,

$$r^{-1}A'_\sharp \cup A''_\sharp = \mathbb{S}^2 - D,$$

ya que $r^{-1}A' \cup A'' = G$, y del mismo modo

$$s^{-1}B'_\sharp \cup B''_\sharp = \mathbb{S}^2 - D.$$

Esto muestra que

$$A_\sharp \quad \sim_G \quad \mathbb{S}^2 - D \quad \sim_G \quad B_\sharp.$$

Pero, entonces, $\mathbb{S}^2 - D$ es paradójico; acabamos de demostrar la llamada *paradoja de Hausdorff*: tenemos dos partes disjuntas $A_\sharp$ y $B_\sharp$ de $\mathbb{S}^2 - D$, tales que cortando cada una de ellas en dos trozos y haciendo girar uno de esos trozos, se reencuentra $\mathbb{S}^2 - D$.

Teorema 6.23 **(Paradoja de Hausdorff)** *En $\mathbb{S}^2$ existe un conjunto numerable D tal que $\mathbb{S}^2 - D$ es paradójico bajo la acción del grupo de las rotaciones (o bajo la acción del grupo de las isometrías).*

De hecho, G opera libremente sobre $\mathbb{S}^2 - D$, por lo que $\mathbb{S}^2 - D$ es paradójico bajo la acción de G, aplicando el teorema 6.13.

Ahora ya no es difícil de terminar la demostración: lo más importante es eliminar ese conjunto D que “molesta”.

Pero eso no es complicado para nosotros: sea p un punto cualquiera de $\mathbb{S}^2 - D$ (que existe porque D es numerable y $\mathbb{S}^2$ no lo es) y sea p' su simétrico respecto al origen. Llamamos s_θ a la rotación de eje orientado $(p'p)$ y de ángulo θ.

Para cada $z \in D$ sea

$$\mathcal{A}(z) = \{\theta : s_\theta(z) \in D\};$$

este conjunto es numerable porque D lo es. Luego la unión

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z \in D} \mathcal{A}(z)$$

es también numerable. Y puede entonces elegirse $\theta_0 \notin \mathcal{A}$. Entonces se tiene $s_{\theta_0}(z) \notin D$, para cada $z \in D$; por lo tanto $s_{\theta_0}(D) \subseteq \mathbb{S}^2 - D$.

Se escribe entonces

$$E = D \cup s_{\theta_0}(D) \cup s_{\theta_0}^2(D) \cup s_{\theta_0}^3(D) \cup \dots$$

Se comprueba inmediatamente que $s_{\theta_0}(E) = E - D$, y por lo tanto

$$E \quad \sim_G \quad E - D$$

y, uniendo $\mathbb{S}^2 - E$ en ambos lados de la equivalencia, resulta que

$$\mathbb{S}^2 \quad \sim_G \quad \mathbb{S}^2 - D.$$

Pero, como $A_\sharp \sim_G \mathbb{S}^2 - D$ y $B_\sharp \sim_G \mathbb{S}^2 - D$ es finalmente

$$A_\sharp \quad \sim_G \quad \mathbb{S}^2 \quad \sim_G \quad B_\sharp,$$

por lo tanto $\mathbb{S}^2$ es paradójico. Hemos probado la llamada *paradoja de la esfera*

Teorema 6.24 **(Paradoja de la esfera)** *La esfera unidad $\mathbb{S}^2$ es paradójica bajo la acción del grupo de las rotaciones SO_3 de $\mathbb{R}^3$.*

Puede incluso probarse que cortando $\mathbb{S}^2$ en sólo *cuatro trozos*, se consiguen dos copias de $\mathbb{S}^2$.

El paso de la esfera $\mathbb{S}^2$ a la bola unidad privada del origen $\mathbb{D}^3$ es muy simple: basta con reemplazar cada punto $z \in \mathbb{S}^2$ por el segmento $(0, z]$ abierto en 0 (el origen de coordenadas) y cerrado en z, lo que nos proporciona de manera inmediata el caracter paradójico de la bola cerrada unidad privada del origen

Teorema 6.25 *La bola unidad $\mathbb{D}^3$ de $\mathbb{R}^3$ privada del origen, es paradójica bajo la acción del grupo de las rotaciones SO_3 de $\mathbb{R}^3$.*

Este resultado no se extiende tal cual a la bola unidad, que de hecho no es paradójica bajo la acción de SO_3 sólo: ésto se debe, como ya hemos comentado antes, a que una rotación cualquiera deja siempre invariante el origen y es fácil deducir que todo conjunto equivalente a la bola bajo la acción de las rotaciones contiene siempre al origen, lo que impide "duplicar" la bola en este contexto (¡los puntos fijos *molestan*!).

Pero, si se hacen intervenir las traslaciones además de las rotaciones, se puede probar que la bola si es paradójica. En efecto, para añadir el origen de coordenadas, sólo hay que utilizar la observación siguiente: el origen 0 es el centro de la bola $\mathbb{D}^3$, elijamos un punto P tal que $0P = \frac{1}{2}$. Sea ρ una rotación de centro P y ángulo θ, tal que $\frac{\theta}{\pi}$ sea irracional. Entonces, los puntos

$$0_0 = 0, \quad 0_1 = \rho(0), \quad 0_2 = \rho(0_1)\dots$$

son todos distintos (pues si existiera $0_m = 0_n$ con $m > n$, se tendría $0_{m-n} = 0_0$ y por lo tanto $(m-n)\theta = 2k\pi$, lo que contradice la irracionalidad del cociente $\frac{\theta}{\pi}$).

Llamamos $A_1 = \{0_i : i \in \mathbb{N}\}$ al conjunto de estos puntos, que es por cierto numerable. Claramente, tenemos que $\rho(A_1) = A_1 - \{0\}$. Si tomamos ahora $A_0 = \mathbb{D}^3 - A_1$, entonces se verifica la igualdad

$$A_0 \cup \rho(A_1) = \mathbb{D}^3 - \{0\},$$

dicho de otra manera, hemos encontrado dos trozos de la bola (cuya unión es la bola), y desplazando uno de ellos, hemos recuperado la bola privada de un punto.

Teorema 6.26 *La bola unidad $\mathbb{D}^3$ de $\mathbb{R}^3$ es paradójica bajo la acción del grupo de las isometrías G_3 de $\mathbb{R}^3$.*

Puede incluso probarse que cortando $\mathbb{D}^3$ en sólo *cinco trozos*, se consiguen dos copias de $\mathbb{D}^3$.

Razonando del mismo modo, se comprueba

Corolario 6.27 *Es posible cortar la bola cerrada unidad $\mathbb{D}^3$ en un número finito de trozos y reagruparlos, sin deformarlos, para obtener n bolas disjuntas de radio 1, donde $n \geq 2$.*

En estas pruebas, el radio de la bola no es importante, y es inmediato comprobar

Corolario 6.28 *Es posible cortar una bola cerrada arbitraria de $\mathbb{R}^3$ en un número finito de trozos y reagruparlos, sin deformarlos, para obtener n bolas disjuntas del mismo radio, donde $n \geq 2$.*

¡A jugar con el guisante! ¿Qué aconsejar a la desdichada rana?

Para hacer desaparecer el terrible desasosiego de la infeliz rana de la fábula, es necesario volver a la noción general de equivalencia por descomposición y exponer un poderoso resultado, obtenido por S. Banach en 1924.

Teorema 6.29 *Sean G un grupo operando sobre un conjunto X y A y B dos partes de X. Si A es equivalente a B, existe una biyección $g\colon A \longrightarrow B$ tal que C es equivalente a $g(C)$ para cada $C \subset A$.*

Y el resultado clave dado por S. Banach y A. Tarski (ver [1]) en 1924 es:

Teorema 6.30 *Sean G un grupo operando sobre un conjunto X y A y B dos partes de X. Si A es equivalente a una parte de B y B es equivalente a una parte de A, entonces A y B son equivalentes.*

Como consecuencia, se comprueba que...

Teorema 6.31 *Dos bolas cerradas de $\mathbb{R}^3$ de radios cualesquiera son equivalentes.*

... ¡es cierto! ¡se puede construir el Sol a partir de un *insignificante* guisante!

Pero, seamos razonables... una rana y un buey pueden difícilmente asimilarse a simples bolas cerradas... Afortunadamente tenemos el siguiente resultado, que se prueba con detalle en [3]

Teorema 6.32 *Dos conjuntos acotados y de interiores no vacíos de $\mathbb{R}^3$ son equivalentes.*

... así que la rana no estaba del todo equivocada: tan solo había errado en el método elegido para aumentar su tamaño...

La paradoja de Banach–Tarski no es válida ni en la recta ni en el plano, porque el teorema de Hausdorff deja de ser cierto en estos dos casos. Pero es cierta en cualquier dimensión superior a tres.

6.3 Relación con la teoría de la medida

La paradoja de Banach–Tarski, como ha quedado claro a lo largo de estas páginas, es una paradoja de la *teoría de la medida*.

Vamos a insistir un poco más en esta idea, a través de algunos resultados en este área.

Definición 6.33 Sea G un grupo operando sobre un conjunto medible (X, μ). Se dice que *G conserva la medida μ*, si para cada $A \subset X$ (A medible) y $g \in G$ es $\mu(A) = \mu(gA)$. También se suele decir que μ es *invariante* bajo la acción de G.

Observar que en particular, si A es medible, gA es medible para cada $g \in G$.

Un tal grupo se comporta bien respecto a conjuntos equivalentes (ver [3]), en el siguiente sentido

Teorema 6.34 *Si G conserva la medida μ sobre X, dos conjuntos equivalentes tienen la misma medida.*

Teorema 6.35 *Si μ es una medida exhaustiva (es decir, aplicable a todas las partes del espacio) en X e invariante bajo la acción de G, entonces es necesariamente $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E) = \infty$, para cada E paradójico en X.*

Como consecuencia del anterior resultado, se deduce (ver [3])

Teorema 6.36 *Si $n \geq 3$, no existe en $\mathbb{R}^n$ una medida μ que sea a la vez exhaustiva, invariante por isometrías y para la que la medida del n-cubo unidad sea 1.*

En otras palabras, no existe una *medida universal* en $\mathbb{R}^n$, si $n \geq 3$.

Por el contrario, en la recta y en el plano no ocurren este tipo de fenómenos tan "molestos":

Teorema 6.37 *Sobre $\mathbb{R}$, existe una medida universal μ finitamente aditiva, exhaustiva y normada sobre $[0, 1]$, invariante por isometrías.*

Teorema 6.38 *Sobre $\mathbb{R}^2$, existe una medida universal μ finitamente aditiva, exhaustiva y normada sobre $[0, 1]^2$, invariante por isometrías.*

S. Banach prueba, de hecho, que existe una manera de medir (de definir la longitud en la recta o el área en el plano) *todas las partes* de la recta y del plano: ésto es lo que impide que la paradoja de Banach-Tarski se produzca en estos casos.

Bibliografía

[1] S. Banach et A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. 6, 244–277, 1924.

[2] M. Guinot, Le paradoxe de Banach–Tarski, Aléas, 2002.

[3] S. Wagon, The Banach–Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1999.