

Qué es la geometría computacional

por

Ferran Hurtado¹, Universitat Politècnica de Catalunya,

Ferran.Hurtado@upc.es

8.1 Geometría y nuevas tecnologías

Una característica fundamental de las tecnologías que han aparecido o se han consolidado a partir del último cuarto del siglo XX es que están constituidas por la aportación conjunta de muchas ramas de la ciencia. Así, por ejemplo, en una *resonancia magnética* se construyen imágenes a partir de medidas de la respuesta del cuerpo a campos magnéticos e impulsos de radiofrecuencia. La señal inducida se transforma en imágenes vía una serie de algoritmos que utilizan una mezcla compleja de física, matemáticas y técnicas de computación. La génesis, interpretación, y comprensión global de lo que se hace, corresponden a ramas diversas de la medicina, pero, como vemos, no se puede decir que la resonancia magnética haya sido un avance “de la medicina”, ya que ha sido un avance producido por una acción combinada de muchas disciplinas científicas.

Otra de las características de las tecnologías más recientes es el uso crucial del ordenador, no ya como destinatario de las aplicaciones desarrolladas, sino como herramienta en la investigación y en la producción. Del mismo modo que un destorni-

¹Algunos fragmentos de este artículo son similares o están tomados de otros textos divulgativos del autor, cuya consulta adicional puede ser de interés para el lector [1,2].

llador o un martillo son herramientas en la construcción de un mueble, el ordenador es actualmente una herramienta utilizada en el diseño, producción o estudio de objetos y de procesos.

Las matemáticas, de una u otra forma, participan en todos estos avances tecnológicos, a veces de forma significativa, pero poco visible, a veces con un protagonismo crucial. En el caso de la geometría, veremos a continuación diversas áreas de investigación aplicada en las que tiene participación sustancial. Entre estas, mencionaremos la Informática gráfica, el Diseño y fabricación asistidos por ordenador (CAD/CAM), la Caracterización y reconocimiento automático de formas, el Diseño de circuitos integrados gigantes, la Visión artificial, los Sistemas de información geográfica y la Robótica.

Algunas áreas de aplicación de la Geometría Computacional

Una característica esencial de los objetos es su “forma”, y es natural que la geometría sea herramienta matemática indispensable para describirla, extraerla, modificarla o aproximarla.

Naturalmente la representación de formas es el núcleo de la Informática gráfica, y cuando la manipulación no se hace en términos de píxels (2D) sino como proyección de un modelo matemático cuyas propiedades se mantienen, la geometría juega un papel determinante (Figura 1).

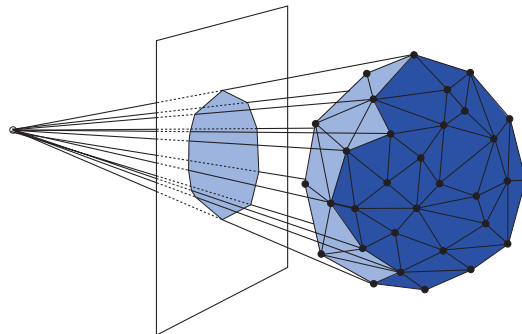


Figura 1: Esquema de proyección en pantalla.

El Modelado geométrico trata la representación de formas de cara a visualizarlas, analizarlas, diseñarlas y estudiar su comportamiento. Todo ello exige adaptarse a los métodos existentes de medición y de toma de muestras, cuando se trata de objetos dados, o adaptarse a los requisitos de los sistemas de manipulación cuando las formas se están creando. En este último caso, los sistemas ayudan tanto a conseguir

características estéticas del objeto, como a ajustar y prever su adecuación funcional, de lo cual es ejemplo claro el diseño industrial.

La definición y exploración de una “forma” puede hacerse con un sistema CAD (*Computer Aided Design*), que permite mover puntos de control y modificar el aspecto. Este es un proceso corriente, como decíamos, en la fabricación de objetos, pero también en la arquitectura (Figura 2).

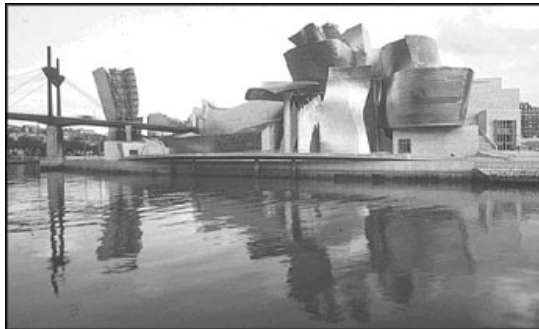


Figura 2: Museo Guggenheim, Bilbao [5].

Otro aspecto es el de la fabricación propiamente dicha de los objetos. Una posibilidad es que sean obtenidos a partir de masas sólidas (como, por ejemplo, bloques de metal o de piedra) y que se precise programar los movimientos de las herramientas o robots que efectúan los cortes, no sólo de forma que se llegue al resultado deseado, sino también evitando colisiones y optimizando el proceso global. En el caso en que el proceso de producción utilice el corte con filamento electrificado, la forma externa se compondrá de superficies regladas.



Figura 3: Modelo de un ala [4].

A veces el diseño incluye animaciones y simulaciones de movimiento, las cuales idealmente se tendrían que poder articular con los sistemas de CAD estándares (Figura 4).



Figura 4: Animación por interpolación del movimiento de un cubo [3].

En los procesos de inspección industrial, que en algunos aspectos incluye lo que se llama *control de calidad*, se verifican los productos respecto a lo que se deseaba obtener, así como en cuanto a las desviaciones del modelo CAD. El objeto se “captura” geoméricamente con alguna forma de *scan*, o con un mecanismo táctil para obtener coordenadas (Figura 5), como el *coordinate measuring machine*. Un aspecto importante es el de comprobar que se cumplan determinados requisitos, como el que la separación de la forma teórica, digamos cilíndrica, por ejemplo, esté dentro del intervalo de los márgenes aceptables, la *tolerancia*.

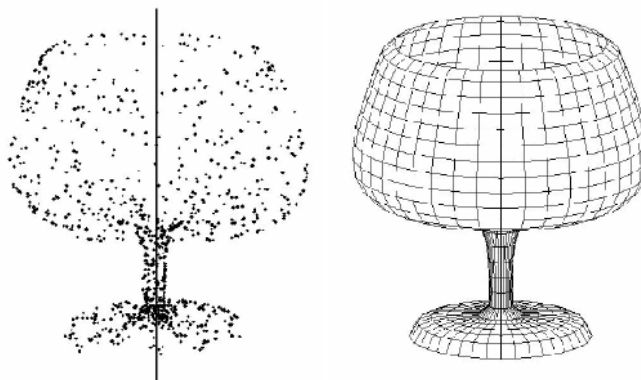


Figura 5: Reconstrucción digital de una copa [3].

El proceso que hemos mencionado de capturar puntos de un objeto para hacer un modelo CAD recibe el nombre de “construcción inversa” (*Reverse Engineering*). No sólo permite fabricar nuevos objetos idénticos al anterior, sino también muchas otras posibilidades, como estudiarlo o modificarlo para mejorarlo.

El estudio de un cuerpo a partir de las imágenes obtenidas como secciones planas del mismo, técnica llamada *tomografía*, es un proceso común a la producción industrial y a la diagnosis médica, del cual es evidentemente un ingrediente la capacidad de interpolar entre secciones (Figura 6) para llegar a la generación de un

modelo digital tridimensional.

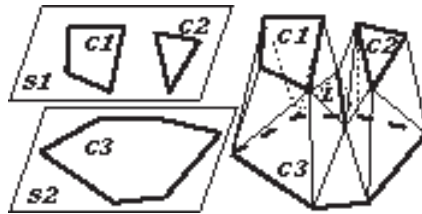


Figura 6: Interpolación entre secciones planas [4].

La Visión por ordenador combina herramientas para capturar ciertos datos de los objetos con algoritmos para detectar determinadas cualidades con la información obtenida. Por ejemplo, permite examinar automáticamente cadenas de montaje de bebidas para comprobar que no haya problemas con las botellas hasta verificar los fusibles en una cadena de montaje de coches. Como es fácil de imaginar, también en las aplicaciones médicas ésta es un área central de investigación y desarrollo. También hemos de mencionar, entre muchas otras, el control por vídeo del tráfico, la identificación automática de formas 2D, la clasificación de modelos ...

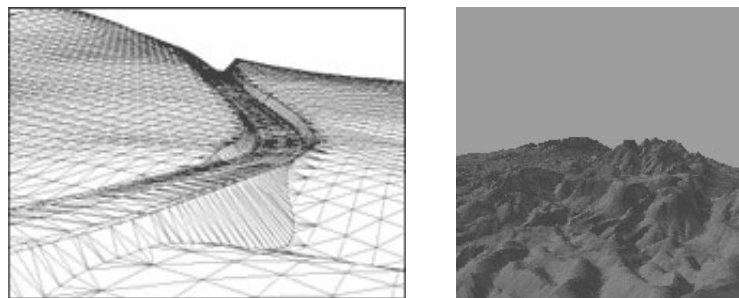


Figura 7: Dos modelos digitales de terrenos [6,7].

La moderna cartografía digital es otro campo de aplicación fecunda. Los *terrenos* se modelan digitalmente, con mallas triangulares o cuadrangulares, lo que permite representarlos, hacer simulaciones y generar simplificaciones (Figura 7). Se ha de tener en cuenta que las nuevas técnicas de medición, como el posicionamiento por satélite, o el barrido láser desde el aire, dan la posibilidad de obtener conjuntos enormes de datos, candidatos a producir imágenes y modelos ajustadísimos, pero que generan problemas importantes de gestión geométrica e informática.

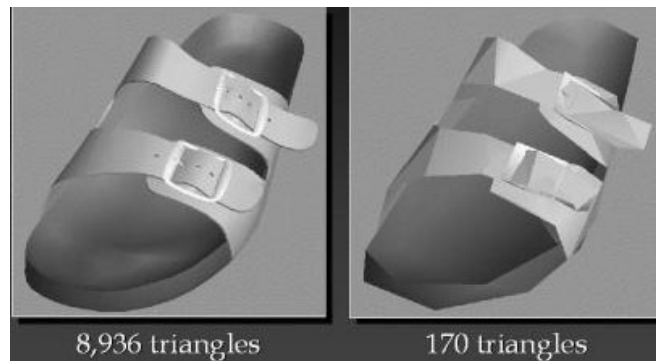


Figura 8: Objeto presentado en dos niveles de resolución [4].

Tanto en el caso de los terrenos (pensemos en los simuladores de vuelo) como en la representación de objetos (pensemos aquí en las visitas virtuales a los museos) es necesario poder disponer de buenos algoritmos de simplificación, que permitan representaciones menos voluminosas de los objetos a medida que se necesite menos precisión (Figura 8), por ejemplo al alejarnos de ellos.

Por lo que respecta a la Robótica, quizás convenga decir que cuando pensamos en robots a menudo nos imaginamos máquinas con gran autonomía y movilidad propia, cuando no incluso antropomórficas y sofisticadas, pero hay que recordar los miles de pequeños robots que se utilizan en cadenas de montaje, mucho más cercanos a la idea de mecanismo articulado. La planificación de los movimientos para cumplir las tareas deseadas en los momentos precisos, evitando problemas y colisiones, es también un cometido de fuerte contenido geométrico.

Todas estas disciplinas, además de tener como rasgo común el carácter geométrico de los objetos involucrados, comparten una característica fundamental que el lector debe tener siempre presente al pensar en los problemas de Geometría computacional que se originan, y que abordaremos en la próxima sección: el carácter *masivo* de la información manipulada. Así, una imagen sencilla en una pantalla de ordenador, puede constar de miles o decenas de miles de objetos elementales (como triángulos), que serán cientos de miles en una imagen cinematográfica. Y si la reconstrucción de una copa puede hacerse con unos cuantos cientos o miles de puntos, la descripción de una región en un sistema de información geográfica requerirá la manipulación de varios millones.

Finalmente, comentaremos que el desarrollo acelerado de Internet ha hecho que sea imprescindible disponer de estructuras para la representación eficiente en sis-

temas multimedia, así como la necesidad de posibilitar la transmisión rápida y precisa de modelos geométricos complejos. Esta es un área actualmente en ebullición, pues se aspira a poder hacer a distancia muchas de las cosas que hemos mencionado, como la diagnosis, el diseño o la visualización.

8.2 Geometría computacional

La Geometría computacional estudia los problemas geométricos desde el punto de vista de la computación, y su núcleo fundamental consiste en el diseño y análisis de algoritmos geométricos eficientes. Sus componentes básicos son la Geometría discreta y combinatoria, así como la Informática teórica, y de ésta particularmente la Algorítmica.

Análisis de algoritmos

Cuando los algoritmos han de ser utilizados por una máquina, un criterio fundamental de eficiencia es la rapidez de ejecución. Para medirla sin haber de programar y ejecutar cada algoritmo, se utiliza un modelo teórico de máquina en el que ciertos procesos tienen asignado un coste (= tiempo) unidad. En el *RAM real* se acepta que un número real se puede almacenar en una unidad de memoria, y las operaciones siguientes se consideran primitivas y pueden realizarse con coste unitario:

- (1) acceso a la memoria;
- (2) operaciones aritméticas básicas (+, −, ×, /);
- (3) comparación de dos números reales (<, ≤, =, ≠, ≥, >);
- (4) (ocasionalmente) raíces enésimas, funciones trigonométricas, la exponencial y el logaritmo.

El comportamiento de un algoritmo depende del conjunto específico de datos sobre los cuales se ejecuta cada vez. El *análisis en el caso peor*, el único que describiremos aquí, consiste en calcular el coste total (= número de operaciones primitivas) de ejecutar el algoritmo en la situación más desfavorable. La cantidad de datos recibidos por el algoritmo se mide en función de algún parámetro n , y el coste será una función $T(n)$. Como los algoritmos se diseñan para grandes valores de n , no se calcula $T(n)$ “exactamente”, sino en orden de magnitud, ignorando los coeficientes constantes. Escribimos $T(n) \in O(f(n))$ para acotar superiormente el tiempo de ejecución $T(n)$ de un algoritmo. Así, si hemos de calcular la distancia

entre dos puntos, tardaremos $O(1)$ (¡o sea tiempo constante!), y si hemos de leer una matriz $2n \times 300n$ tardaremos $O(n^2)$.

Vale la pena detenerse para comprender la gran importancia de tener un coste u otro. Por ejemplo, hay una diferencia abismal de disponer, al resolver un problema, de un algoritmo de orden $O(n \log n)$, de uno $O(n^2)$, o bien de uno $O(n^4)$. Si la unidad de medida es la millonésima de segundo (= 1 microsegundo = $1 \mu s$) y se tienen 10000 datos, un algoritmo $O(n \log n)$ tardaría del orden de $10000 \times 4 \mu s = 0.04$ segundos, uno $O(n^2)$ tardaría unos $10000 \times 10000 \mu s$, es decir 1 minuto y 40 segundos, y uno $O(n^4)$ tardaría ¡unos 317 años! Si hay 100000 datos, los dos primeros pasan a = 0.4 segundos y a 2 horas y 47 minutos, respectivamente, dejamos al lector las cuentas para el $O(n^4)$, que son ya en milenios.

Muchos avances espectaculares en la rapidez de los ordenadores son en realidad mejoras en los algoritmos (que se traducen en el *software*), las cuales incrementan drásticamente la rapidez de ejecución, tal como acabamos de ver.

Seis ejemplos breves

Vamos a mencionar a continuación escuetamente algunos problemas en los que se pone de relieve la profunda interrelación entre las geometrías discreta, combinatoria y computacional, aunque no nos sea posible aquí desarrollar su solución. Empezaremos por uno “interno” a la matemática.

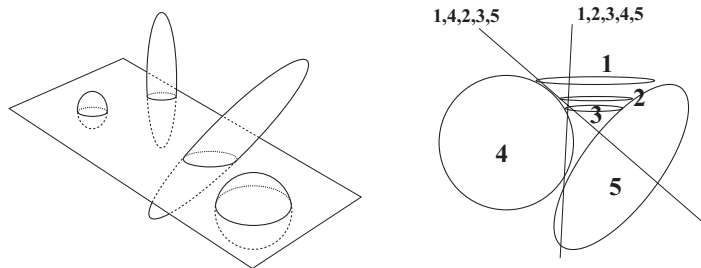


Figura 9: Transversales de familias de objetos.

Una k -transversal de una familia de subconjuntos de E^d es una k -variedad que los interseca a todos. Hallar *condiciones* necesarias y/o suficientes para la existencia de transversales de convexos es un problema clásico de la *geometría discreta*.

Una recta transversal induce una permutación de los conjuntos de la familia. Un problema típico de *geometría combinatoria* consiste en estudiar cuál es el máximo

número de permutaciones que se puede conseguir.

En el contexto de la *geometría computacional* lo que se quiere es *construir* una k -transversal, y a veces todas. El conjunto $\mathcal{T}_k^d(\mathcal{A})$ de las k -transversales de una familia \mathcal{A} es un subespacio de la variedad grassmanniana que tiene como puntos las k -variedades de E^d . Construir todas las k -transversales de \mathcal{A} significa dar una descripción completa (pero finita) de $\mathcal{T}_k^d(\mathcal{A})$.

Presentamos a continuación cinco problemas de enunciado más elemental que el anterior, en los que el origen en las aplicaciones puede hacerse también más explícito.

Problema: Diámetro (Figura 10)

Motivación: Normalización, *pattern recognition*

Dados n puntos del plano, su diámetro es el máximo de las distancias entre pares de puntos. ¿Cómo se hace para encontrarlo? ¿Cómo están situados los puntos que forman un par diametral? ¿Cuántas veces puede repetirse la distancia máxima?

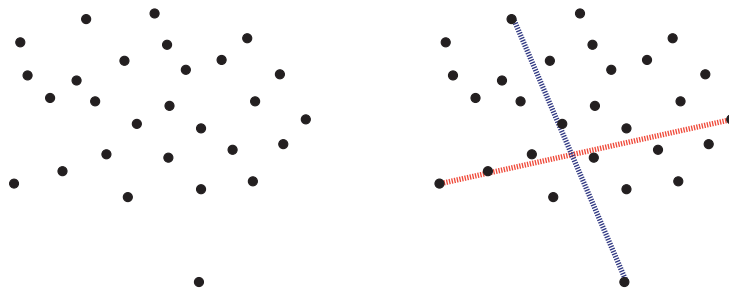


Figura 10: ¿Cuál es el par de puntos a distancia máxima?

Como hay $\binom{n}{2}$ pares, está claro que se puede encontrar *por fuerza bruta* con coste $O(n^2)$. Debe notarse el carácter no geométrico de esta solución, además de su ineficiencia.

Problema: Círculo recubridor mínimo (Figura 11)

Motivación: Ubicación óptima de servicios urgentes

Dados n puntos del plano, el mejor lugar para situar un servicio urgente es aquel en el que se hace mínima la distancia al punto más lejano. Esto equivale a tomar el centro del círculo más pequeño que cubre todos los puntos. ¿Cómo se hace para encontrarlo? ¿Cuántas ternas distintas de puntos definen una circunferencia

englobante?

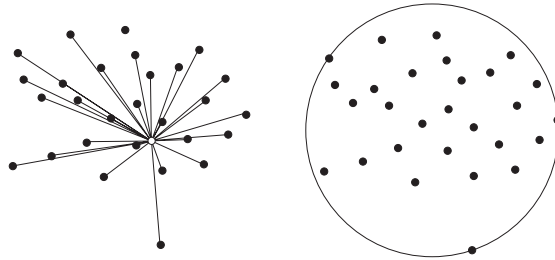


Figura 11: Círculo recubridor mínimo.

Problema: Corona recubridora mínima (Figura 12)

Motivación: Inspección industrial, metrología

Dados n puntos del plano, la medida de su circularidad es la diferencia de radios en la corona circular más estrecha que los cubre. ¿Cómo se hace para encontrarla? ¿Cómo están situados los puntos en su frontera?

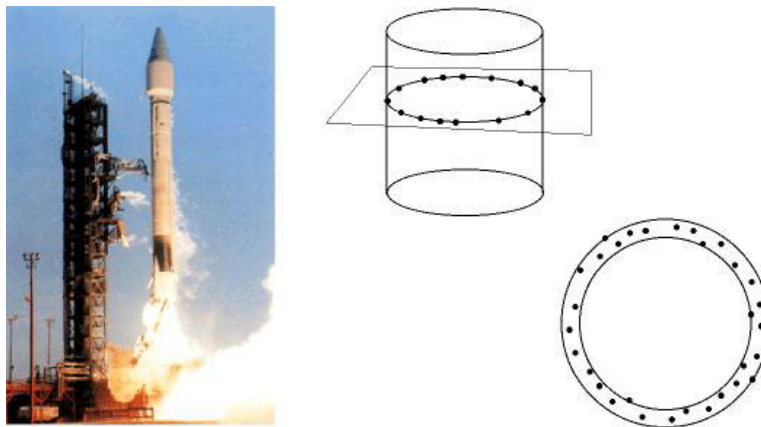


Figura 12: La sección recta del cuerpo de un cohete debería ser tan circular como sea posible.

Problema: Triangulación de Delaunay (Figura 13)

Motivación: Sistemas de información geográfica

Para construir el modelo digital de un terreno se proyectan los puntos del espacio 3D en el plano y se hace una “buena” triangulación, que después se usa para interpolar. La mejor triangulación en el plano es aquella en la que todos los triángulos tienen el circuncírculo vacío de puntos. ¿Por qué existe? ¿Cómo se construye? ¿Qué

otras propiedades tiene?

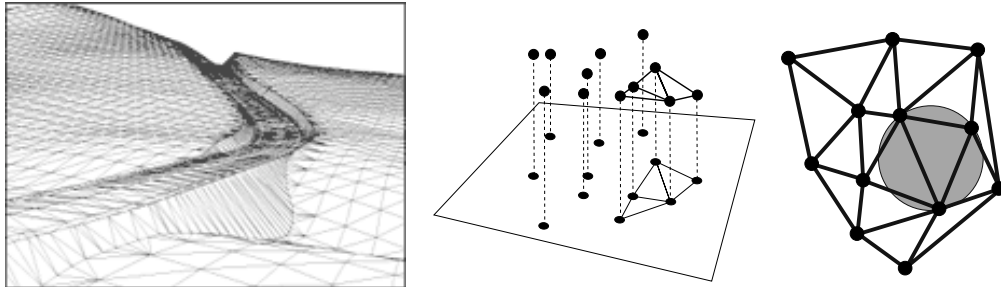


Figura 13: Triangulación de Delaunay.

Problema: Isometría de conjuntos (Figura 14)

Motivación: Reconocimiento automático de formas

Dados dos conjuntos de n puntos, ¿cómo se calcula eficientemente si son “el mismo”, es decir, si existe o no un desplazamiento que transforma los puntos de uno en los puntos del otro? ¿Cuántas copias isométricas de un conjunto pueden aparecer como subconjuntos de otro?

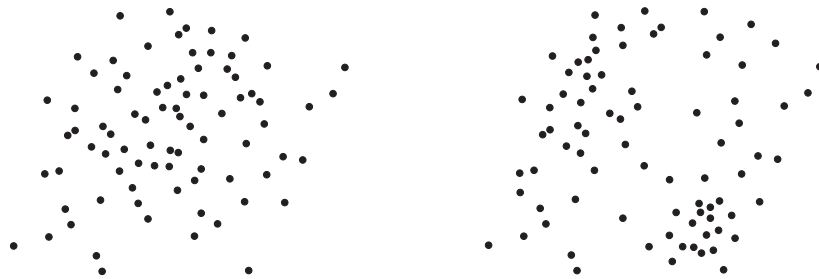


Figura 14: ¿Son el mismo conjunto?

Problema: Sombra máxima (Figura 15)

Motivación: Simulación de iluminaciones

*¿Cómo se puede encontrar la posición en la que un politopo del espacio tridimensional tiene proyección ortogonal de área máxima sobre el plano horizontal?
¿Qué relaciones hay entre el volumen del cuerpo y las áreas de las proyecciones?
¿Cuántas proyecciones combinatoriamente distintas puede haber?*

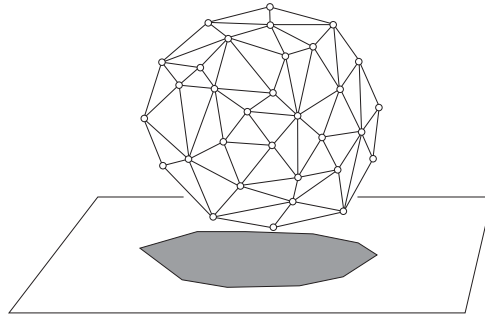


Figura 15: “Sombra” proyectada por un politopo.

Problema: Rectángulo contenedor mínimo (Figura 16)

Motivación: Escalado, *windowing*, facturación postal automática

Dado un polígono convexo, el rectángulo de área mínima que lo contiene ¿qué propiedades geométricas tiene? ¿Y el de perímetro mínimo? ¿Cómo se hace para encontrarlos? ¿De cuántas maneras distintas puede un polígono estar en contacto con un rectángulo “inencogible”?

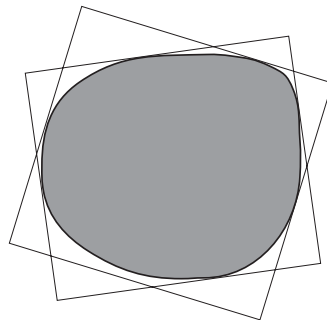


Figura 16: Varios rectángulos contenedores.

Un ejemplo detallado

Veremos finalmente un ejemplo de cómo la utilización de resultados geométricos permite resolver eficientemente un problema computacional.

Como hemos dicho anteriormente, dado un subconjunto S de \mathbb{R}^2 , se llama *diámetro de S* al máximo de las distancias entre pares de puntos de S . La normalización del tamaño de un objeto o figura, que se hace escalando su diámetro a 1, es un paso preliminar en muchos procesos de Reconocimiento Automático de

Formas, Visión Artificial o Robótica, por lo que es obvia la importancia del concepto en las aplicaciones.

Si dos puntos x e y de S son tales que $d(x, y) = \text{diámetro}(S)$, decimos que x e y son un *par diametral* de S . Está claro que un conjunto puede tener muchos pares diametrales, incluso infinitos, como en el caso del círculo. Nosotros vamos a concentrarnos en el caso que S sea un polígono convexo. Observemos que también en este caso podemos tener un único par diametral, o muchos pares, como pasa en los polígonos regulares. Formulemos ya con precisión el problema que queremos resolver.

Problema DPC *Hallar un algoritmo tal que, dado un polígono convexo de n vértices $S = \{P_1, \dots, P_n\}$, en el sentido horario en que aparecen en su frontera y especificados por sus coordenadas, permita calcular cuál es el valor de $\text{diámetro}(S)$.*

Este problema es fácilmente resoluble por el método que llamamos *de fuerza bruta*, que en este caso consiste en calcular cada una de las distancias entre pares de vértices de S y quedarse con la mayor. Como cada distancia se calcula en tiempo constante y en total hay $\binom{n}{2}$, el coste es $O(n^2)$. Magnífico si tenemos una docena de puntos, pero ya hemos visto antes lo que puede suceder si tenemos 10000 o 100000 puntos.

Una observación fundamental es que el método de fuerza bruta procedería igualmente si la cantidad asignada a cada par de puntos fuera arbitraria, en vez de una distancia, pues ignora totalmente las posibles propiedades geométricas de la distancia o de los pares diametrales, y es por ello por lo que por este conducto podemos tener esperanzas de encontrar algún algoritmo más eficiente.

En primer lugar, necesitamos formular algunas definiciones y establecer algunos lemas. Dado un polígono convexo S , diremos que una recta es *de soporte* de S si contiene puntos de la frontera de S , pero no puntos interiores. Dos vértices, P y Q de S , se dice que son *antipodales*, o que forman un *par antipodal*, cuando existen rectas de soporte de S , una por P y otra por Q , que sean paralelas. Obsérvese que un vértice puede tener diversos vértices antipodales (Figura 17, izquierda). Cuando las paralelas de soporte no son únicas, se dice que el par antipodal es *propio*. Por ejemplo, en la Figura 17, derecha, los pares A y D , y B y C , son antipodales pero no propios; en cambio A y C , y B y D , son pares antipodales propios.

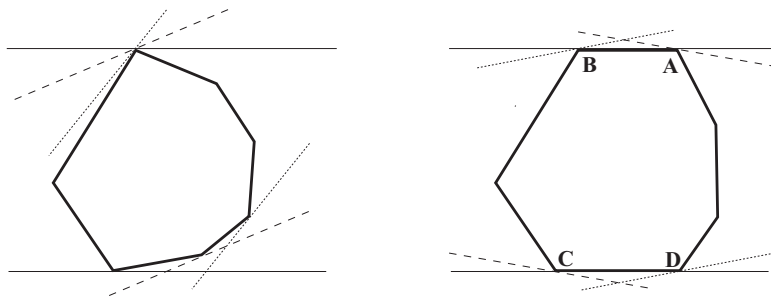


Figura 17: Vértices antipodales en los polígonos convexos.

Lema 8.1 Sea $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ un polígono convexo. Si P_i y P_j son un par diametral de S , entonces son también un par antipodal propio de S .

Demostración. Sean r_i y r_j las rectas por P_i y P_j , respectivamente, perpendiculares al segmento P_iP_j . No hay ningún punto de S fuera de la franja que limitan r_i y r_j , porque ello contradiría el carácter diametral del par. Pero, por la misma razón, el único punto de S sobre r_i es P_i y el único sobre r_j es P_j , con lo que vemos que P_i y P_j son un par antipodal propio de S . Q.E.D.

Esto nos da ya una vía para calcular el diámetro de un polígono convexo $S = \{P_1, \dots, P_n\}$: examinamos todos los pares antipodales propios de S , quedándonos con el más distanciado. ¿Pero cómo se hace esto? Además, ¿cuántos pares antipodales puede tener S ? ¿Y pares diametrales? Pues hay que observar que si el número de pares antipodales/diametrales puede llegar a ser cuadrático, no habríamos avanzado nada respecto al método de fuerza bruta. Pero veremos ahora que no es el caso, utilizando como herramienta el *paso al espacio dual*.

Vamos a considerar que tenemos “dos copias” del plano, que, para entendernos, llamaremos *plano primal* y *plano dual*, y denotaremos respectivamente por \mathcal{P}' y \mathcal{P}'' . A cada punto P' del primal le asociamos una recta P'' del dual, y a cada recta (no vertical) r' del primal le asociamos un punto r'' del dual:

$$\text{punto } P' = (a, b) \in \mathcal{P}' \quad \longrightarrow \quad \text{recta } P'' \in \mathcal{P}'' \text{ y } = ax - b;$$

$$\text{recta } r' \in \mathcal{P}' \text{ y } = mx + n \quad \longrightarrow \quad \text{punto } r'' = (m, -n) \in \mathcal{P}''.$$

Ahora observemos que

$$P' = (a, b) \text{ [está por encima de / pertenece a / está por debajo de]}$$

$$r' \equiv y = mx + n$$

si, y sólo si, respectivamente,

$$b \ [> / = / <] \ am - b, \text{ es decir, } -n \ [> / = / <] \ am - b,$$

que equivale a

$$r'' = (m, -n) \text{ [está por encima de / pertenece a / está por debajo de]}$$

$$P'' \equiv y = ax - b.$$

En otras palabras, el orden vertical recta/punto se invierte. Por ejemplo, unos puntos del primal por debajo de una recta, se transforman en rectas del dual que pasan por encima del punto asociado a la recta.

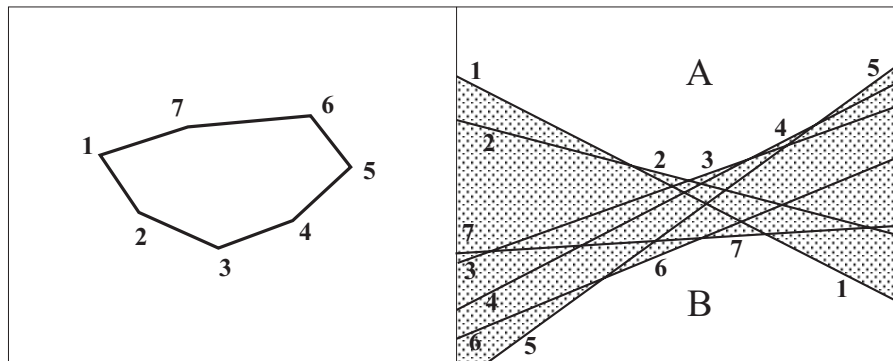


Figura 18: Un polígono convexo en el plano primal \mathcal{P}' (izquierda), y la estructura correspondiente en el plano dual \mathcal{P}'' (derecha).

Miremos ahora la Figura 18 que nos describe el paso al dual de un polígono convexo S dado en el primal. Las rectas que dejan el polígono por debajo se transforman en los puntos del dual de la zona B . Las rectas que dejan el polígono por encima se transforman en puntos del dual de la zona A . Las rectas de soporte del polígono se transforman en los puntos de la frontera F entre la región sombreada y las regiones A y B .

Como rectas paralelas del primal se transforman en puntos con igual abscisa en el dual, podemos resolver el problema de encontrar todos los pares antipodales de S de la manera siguiente (y así resolver el Problema DPC). Barremos el plano dual con una recta vertical r que va desde $x = -\infty$ hasta $x = \infty$ (Figura 19). Los dos puntos U y V de corte con F son en cada momento dos rectas del primal de soporte del polígono. Las rectas del dual que juntamente con r determinan los puntos U y V son en el primal un par antipodal de vértices.

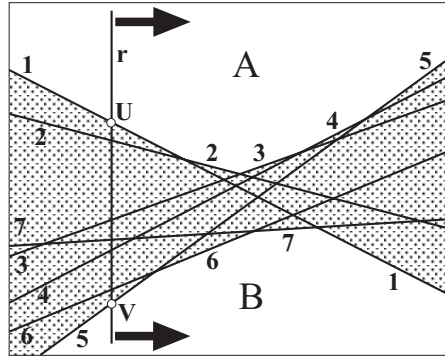


Figura 19: Barrido del plano dual por una recta vertical y obtención de los pares antipodales.

Este proceso lo pensamos como fenómeno continuo, pero se puede discretizar parando en el “siguiente” punto de F . Naturalmente, cada vez que encontramos un nuevo par antipodal, calculamos la distancia entre los puntos, y actualizamos si es necesario un registro con el máximo valor que se haya obtenido. Obsérvese que no se deja de examinar ningún par antipodal y, por lo tanto, se obtiene efectivamente el diámetro, gracias al Lema 8.1.

El análisis se puede hacer como sigue. El paso al dual lo hacemos en tiempo $O(n)$. Cada paso del barrido en el dual se hace en tiempo constante, y el número de pasos es exactamente n . Así pues, el coste total es $O(n)$.

Además, este método nos demuestra también que el número de pares antipodales propios es a lo sumo n (exactamente n si no hay lados paralelos), y ello da una cota superior para el número de pares diametrales. En general, no todos los pares antipodales propios serán diametrales, pero puede darse el caso. Tomemos, por ejemplo, un triángulo equilátero ABC , con centro en A tracemos el arco circular BC y coloquemos en él $n - 3$ puntos; es fácil ver que este conjunto de puntos tiene n pares diametrales. Resumimos esto en el enunciado siguiente.

Proposición 8.2 *Un polígono convexo de n vértices tiene como máximo n pares diametrales, y esta cota es ajustada.*

También estamos en condiciones de acabar, finalmente, el Problema DPC:

Teorema 8.3 *El diámetro de un polígono convexo de n vértices, $S = \{P_1, \dots, P_n\}$,*

especificados por sus coordenadas en el orden en que los puntos aparecen en la frontera, puede encontrarse en tiempo $O(n)$.

Bibliografía

- [1] F. Hurtado, Geometria i noves tecnologies, Publicacions de la Facultat de Matemàtiques i Estadística, Universitat Politècnica de Catalunya, 2002.
- [2] F. Hurtado, *Geometría computacional: una instantánea*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, n.12, 2000.
- [3] Imagen de la página web
http://www.geometrie.tuwien.ac.at/ig/industrial_geometry.html, Institute of Geometry, Vienna University of Technology, Prof. Dr. Helmut Pottmann.
- [4] Imagen de la página web <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/mesh/>, Computer Science Division of the Department of Electrical Engineering, University of California at Berkeley, Dr. Jonathan Schewchuk.
- [5] Imagen de la página web http://www.geovirtual.es/edit/en_galeria.html#.
- [6] Imagen de la página web
http://www.bossintl.com/html/quicksurf_overview.html de BOSS International.
- [7] Imagen de la página web <http://everest.hunter.cuny.edu/terrain/>, Terrain Analysis Home Page, Hunter College Department of Geography, New York NY.

