

Introducción al Caos Determinista

por

Juan M. Aguirregabiria, Universidad del País Vasco

*Es difícil hacer predicciones,
especialmente sobre el futuro.*
Niels Bohr.

Introducción

La palabra «caos» proviene del griego «kaos», que significa «abertura, oquedad insondable» y que en la Teogonía de Hesíodo designaba el espacio vacío infinito que existía antes de todas las cosas. En latín «chaos» se interpretaba como la masa en estado bruto sin modelar, sobre la que el gran arquitecto del mundo introdujo orden y armonía generando el Cosmos. Actualmente se usa también con el significado de confusión y desorden. Sin embargo, desde hace unas tres décadas, el sustantivo «caos» aparece a menudo calificado por el adjetivo «determinista», lo que resulta un tanto chocante, incluso contradictorio, la primera vez que se lee o escucha. El objetivo de este artículo es explicar cómo pueden conjugarse ambas palabras y qué significan cuando aparecen unidas.

En primer lugar recordaremos cómo se introdujo el determinismo en la ciencia. Luego pasaremos revista a los obstáculos, de principio o de origen práctico, que aparecen cuando se quiere predecir la evolución de un sistema determinista. Un modelo matemático ingenuo de un sencillo dispositivo mecánico nos servirá para

introducir algunos conceptos, entre los que destacan las definiciones de caos y de los atractores caóticos y extraños. Tras dar la más simple de las definiciones de dimensión fractal, la usaremos para cuantificar el obstáculo a la predicción que supone la presencia de fronteras fractales entre cuencas de atracción, incluso en ausencia de atractores caóticos. Otro tipo de obstáculo es generado, en el fenómeno de dispersión caótica, por la presencia de órbitas periódicas no atractivas. Para terminar, mencionaremos algunos aspectos del caos que la longitud de este artículo ha obligado a dejar fuera.

El determinismo laplaciano

Al parecer la evolución ha dotado al ser humano de una gran capacidad y tendencia a buscar explicaciones a los fenómenos que ocurren a su alrededor, lo que le hace muy propenso tanto a la curiosidad que mueve toda actividad científica como a las supersticiones más absurdas, por citar sólo las consecuencias más extremas de esa necesidad de *entender* que todos tenemos.

En todo caso, hay pautas regulares muy visibles que no pudieron escapar a la atención de nuestros antecesores hace milenios, como la incesante sucesión de días y noches, los meses lunares, las estaciones —y su repercusión en el clima y en las tareas de recolección y, más tarde, en la agricultura—, o el movimiento del firmamento, con sus elementos inmutables (las estrellas fijas que rotan al unísono) y los movimientos más complicados pero más o menos regulares de los planetas («vagabundos» en el significado original de la palabra).

Pocas dudas podemos albergar sobre el interés que este orden celeste despertó en los seres humanos y cuyo recuerdo pervive en monumentos megalíticos como el famoso Stonehenge (3200 a 2500 A.C.), en la tablillas que desde 1800 A.C. recogen las observaciones meteorológicas y astronómicas de la civilización babilonia, en la temprana astronomía china, en el calendario azteca, en ciertas construcciones mayas, etc. También sabemos de tempranas explicaciones de carácter mitológico o religioso del orden observado en el firmamento celeste, que es para unos la morada de los dioses y que para muchos ejerce una gran influencia sobre los humanos (desde su obvia correlación con las crecidas del Nilo, vitales para la agricultura egipcia, hasta supercherías como la astrología).

Pero aquí nos interesan únicamente las explicaciones científicas. ¿Cómo olvidar la perdurable influencia de los trece libros de Claudio Ptolomeo que hoy conocemos por el nombre que les dieron los traductores árabes: el *Almagesto*? En ellos —que, tras los *Elementos* de Euclides, constituyen uno de los textos científicos de más

larga vida— se propone un sistema que, basado en una de las figuras geométricas más sencillas, la circunferencia, permitía explicar y, lo que es más importante, predecir el movimiento de los planetas con una precisión excelente para la calidad de las medidas astronómicas realizadas antes del siglo XVI. Es en la segunda mitad de esta centuria cuando tiene lugar la ingente labor de recogida de datos astronómicos realizada, antes de la invención del telescopio, en cantidad y calidad sin precedentes por Tycho Brahe. Su sucesor, Johannes Kepler, se valió de esos datos, incompatibles con el sistema heliocéntrico de Ptolomeo y con el geocéntrico de Copérnico, para establecer sus famosas tres leyes que describen el movimiento de los planetas y se basan en otras las curvas bien conocidas por los geómetras de la antigüedad: la elipse.

Pero para una explicación más profunda, hacía falta otro elemento importante: una ciencia, la mecánica, que estaba aún muy poco desarrollada. Es imposible omitir a este respecto la mención de las contribuciones de Galileo, entre las que es de especial relevancia para el tema que nos ocupa la observación y descripción de las oscilaciones lineales del péndulo, que no sólo permitieron construir relojes mucho más precisos, sino que constituyen el primer ejemplo de una de las técnicas más fructíferas —aunque, como veremos, de limitado alcance— de las matemáticas, la física y otras ciencias: la aproximación lineal. Pero es la magna obra de Newton recogida en sus *Principia* donde no sólo se establece una mecánica completa sino que, en un paso de una osadía y acierto intelectual extraordinarios, sólo explicables por un genio sin par, se enuncia su ley de gravitación universal, que con el concurso de sus leyes del movimiento, permitía explicar con gran precisión y detalle el movimiento de los astros. Las leyes contenidas en los *Principia* permitieron a Halley predecir en vida de Newton el retorno del cometa que lleva su nombre y —gracias a desarrollos posteriores, que luego mencionaremos, y a técnicas matemáticas del cálculo diferencial creado, al parecer independientemente, por Newton y Leibniz— a Leverrier (y a Adams) descubrir en el siglo XIX el octavo planeta, Urano, no a través del telescopio —como había hecho Herschel con Neptuno—, sino mediante lápiz y papel.

Este extraordinario valor predictivo de la mecánica celeste, que es presentada en forma mejorada en los cinco volúmenes del *Traité du Mécanique Céleste* que Pierre Simon Laplace comienza a publicar a finales del siglo XVIII, le conducen a decir lo siguiente:

Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, así como la situación

respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, abarcaría en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un débil esbozo de esta inteligencia.

Ésta es la esencia del determinismo laplaciano. Se puede predecir con total certeza el futuro si se cumplen tres premisas:

- 1) Se conocen las leyes («conociera todas las fuerzas») que gobiernan los fenómenos estudiados. Será tarea de la ciencia correspondiente (física, economía, ecología, etc.) hallar esas leyes, que darán el sistema dinámico (por ejemplo, un sistema de ecuaciones diferenciales, ordinarias o en derivadas parciales) que describa la evolución del sistema.
- 2) Se conocen las condiciones iniciales («la situación respectiva...»). Como asegura el correspondiente teorema de existencia y unicidad, para cada conjunto completo de condiciones iniciales existe una única solución, es decir, un futuro bien determinado. Pero esta existencia en principio de la solución, aun teniendo carácter fundamental, no es suficiente a efectos prácticos, como veremos enseguida.
- 3) Se es capaz de calcular la solución («si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos») de forma exacta o aproximada, por métodos analíticos o numéricos (hoy día, casi siempre, usando un algoritmo numérico en un rápido ordenador).

Los obstáculos a la predicción

Es fácil convencerse de que, aun admitiendo que la naturaleza o los fenómenos que estudiamos obedezcan en el fondo leyes perfectamente deterministas, en la práctica pueden aparecer obstáculos de diversa índole que dificulten seriamente (o arruinen por completo) la predicción de la evolución futura.

Empezando por el final, ¿podemos esperar ser siempre capaces de calcular la solución de nuestro sistema dinámico, aunque sea de forma numérica, por muy rápidos que sean nuestros ordenadores y muy eficaces nuestros códigos numéricos? Hay que recordar que muchos sistemas físicos son extraordinariamente complejos, con un número de componentes tan elevado —el número de Avogadro que mide el

número de átomos o moléculas en un mol de cualquier sustancia es $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ — que hace ilusoria la esperanza de calcular la posición de todas las moléculas de un litro de un gas, aun si simplificáramos el modelo matemático. Sabemos que en estos casos renunciamos, desde el principio, a tan detallado conocimiento y nos conformamos con el estudio de algunas magnitudes colectivas (por ejemplo, la temperatura en los distintos puntos de una barra) que describen alguna propiedades interesantes (la energía media de las partículas de la barra) y cuya evolución puede ser determinista (gracias al teorema de existencia y unicidad para la ecuación del calor). Acudimos para ello a ramas de la física como la termodinámica o la más fundamental física estadística, que a su vez tendrá que usar herramientas matemáticas como el cálculo de probabilidades, en cuyo establecimiento tanta influencia tuvo otro gran libro del mismo Laplace: *Théorie Analytique des Probabilités* (1812).

La primera hipótesis del determinismo laplaciano era el conocimiento de las leyes que rigen los fenómenos sometidos a estudio. Dejando de lado el hecho de que nuestro conocimiento de las leyes naturales (o de la economía, por poner otro ejemplo) suele ser limitado, a veces esas mismas leyes imponen límites a la capacidad de predicción. El caso más conocido es la interpretación probabilística de la mecánica cuántica y el principio de incertidumbre de Heisenberg: *en el mundo microscópico la física no nos permite predecir dónde estará una partícula, sino tan sólo la probabilidad de encontrarla en un punto; ni siquiera pueden medirse simultáneamente con toda precisión la posición y velocidad de la partícula.*

En el mundo macroscópico, en la mecánica de fluidos, existe un fenómeno cuya comprensión sigue siendo limitada: la turbulencia¹. Puesto que la ecuación de evolución de los fluidos es conocida, una posible explicación de la dificultad —que a veces se asocia con los nombres de Landau y Hopf— sería que se trata de un sistema muy complicado, con un número infinito de grados de libertad.

Sin embargo, desde hace tres o cuatro décadas, científicos de muy distintas especialidades han ido convenciéndose (y convenciéndonos) de que no hace falta un número grande de grados de libertad para tener comportamientos complicados. Recordemos lo que pasa con los dados: aun siendo un sistema relativamente

¹Al parecer, con relación a este fenómeno Heisenberg dijo lo siguiente: “Cuando me encuentre con Dios le haré dos preguntas: ¿por qué la relatividad? y ¿por qué la turbulencia? Estoy convencido de que tendrá una respuesta para la primera”. Frases análogas se atribuyen a Lamb: “Ahora soy viejo y cuando muera y vaya al cielo espero que me sean aclaradas dos cuestiones. Una es la electrodinámica cuántica y la otra el movimiento turbulento de los fluidos. Soy bastante optimista con relación a la primera”.

sencillo cuya evolución es descrita por la mecánica clásica, suelen ser aceptados como generadores de azar. Pero hay otro ejemplo, que ya preocupaba a Newton: el movimiento de la Luna y su generalización conocida con el nombre de **problema de tres cuerpos**. De hecho, fue estudiando este problema como Henri Poincaré —en el ensayo que ganó el concurso convocado en 1889 por Oscar II rey de Suecia y Noruega— entrevió por primera vez algunos de los aspectos de lo que ahora se conoce con el nombre de caos determinista.

Sin embargo este trabajo (y otros de diversos matemáticos y algún que otro astrónomo) tuvieron inicialmente una influencia muy limitada, quizá porque la ausencia de ordenadores impidió visualizar algunos de los efectos prácticos de este tipo de fenómenos. Hubo que esperar a los años 60 y 70 para que meteorólogos (Lorenz y el «efecto mariposa»), matemáticos (Ruelle y Takens), físicos (Feigenbaum) y biólogos (May) dieran un gran impulso al estudio del comportamiento caótico de sistemas sencillos e hicieran notar a la comunidad científica la importancia y ubicuidad del fenómeno, que a menudo está asociado a la imposibilidad práctica de cumplir con perfecta exactitud la segunda hipótesis del paradigma laplaciano. En efecto, como veremos luego, los inevitables errores en la determinación de las condiciones iniciales son ampliados de forma exponencial por muchos sistemas dinámicos no lineales, de forma que la validez de la predicción queda severamente limitada. El obstáculo a la predicción procede así de la conjunción entre una realidad práctica (la precisión finita de toda medida) y la estructura matemática de la ecuación de evolución.

Un dispositivo mecánico

Una buena parte de nuestra introducción al caos se basará en un modelo matemático simplificado del dispositivo mecánico de la figura 48. Una varilla de acero tiene un extremo fijado en un soporte rígido mientras el otro puede oscilar entre dos imanes colocados simétricamente. El soporte se halla sometido a una fuerza externa armónica $F = f \cos \omega t$.

Está claro que, por simetría y en ausencia de fuerza externa, en el centro —es decir, cuando la varilla está en posición vertical— hay un punto de equilibrio inestable rodeado de dos puntos de equilibrio estables en posiciones simétricas con el extremo libre de la varilla cercano a uno de los imanes. Esta disposición de puntos de equilibrio sugiere un modelo ingenuo en el que se sustituye la fuerza magnética sufrida por la varilla por la derivada cambiada de signo de un potencial como el que se muestra en la parte inferior de la figura 48, cuya representación matemática más

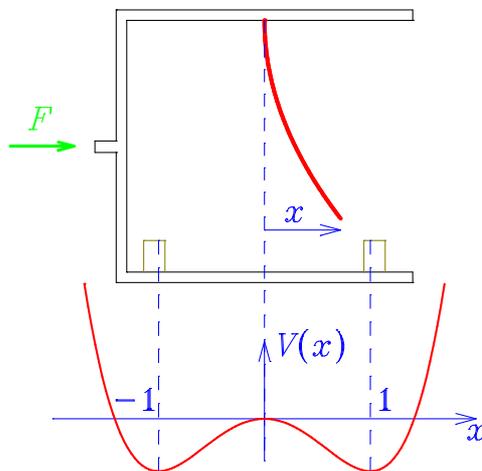


Figura 48 Un dispositivo mecánico y su modelo matemático.

sencilla es (en variables adimensionales)

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^2(2 - x^2). \quad (5.1)$$

De este modo si, en un primer momento, despreciamos el rozamiento y la fuerza externa, la ecuación del movimiento será (tomando una masa unidad)

$$\ddot{x} = -V'(x) = x - x^3. \quad (5.2)$$

Si ahora añadimos una fuerza de rozamiento debida al aire proporcional a la velocidad ($-\gamma\dot{x}$) y la fuerza externa, el sistema dinámico que describe la evolución del sistema es la ecuación de **Duffing**:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = f \cos \omega t. \quad (5.3)$$

(Escogeremos la unidad de tiempo de forma que $\omega = 1$). Podríamos tener la tentación de pensar que hemos simplificado demasiado y, de hecho, esta ecuación no nos resulta tan extraña. Si quitamos el segundo término entre paréntesis es una ecuación lineal de coeficientes constantes con solución trivial², pero, como veremos a continuación, ese término no lineal tiene consecuencias dinámicas asombrosas, de forma que la ecuación (5.3) es muy rica en comportamientos dinámicos.

²Si, además, cambiamos el signo del término que queda entre paréntesis recuperamos el oscilador armónico amortiguado, tan conocido de los cursos de física de los primeros años de carrera y tan importante para introducir el fenómeno de resonancia.

Oscilaciones periódicas

Supongamos inicialmente que no hay rozamiento ($\gamma = 0$) ni fuerza externa ($f = 0$). En tal caso el sistema dinámico es conservativo y tenemos una integral primera (la ley de conservación de la energía) que nos proporciona la ecuación de las trayectorias en el espacio de fases (x, \dot{x}) :

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{4}x^2(2 - x^2) = E. \quad (5.4)$$

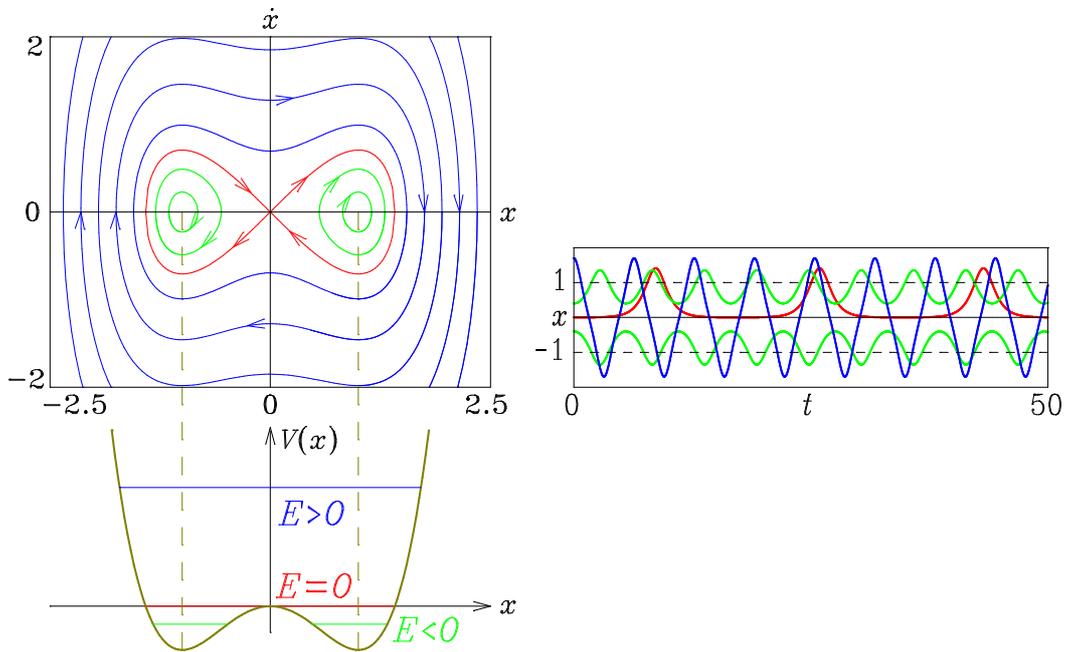


Figura 49 Espacio de fases y algunas soluciones cuando $\gamma = f = 0$.

En los mínimos de la energía potencial tenemos los centros estables $(\pm 1, 0)$ mientras que al máximo le corresponde el origen $(0, 0)$ que es un punto de ensilladura inestable. Las otras dos trayectorias de energía nula son órbitas homoclínicas que se hallan tanto en la variedad estable del origen como en la inestable. El resto de las trayectorias de fase corresponden a oscilaciones periódicas cuyas órbitas cerradas encierran un sólo centro (si está dentro del correspondiente pozo de potencial: $E < 0$) o ambos (si la energía es suficiente para pasar por encima del máximo: $E > 0$).

Oscilaciones amortiguadas

Si ahora tenemos en cuenta el rozamiento, en toda órbita que no sea un punto de equilibrio la energía decrecerá monótonamente y (con las excepciones que luego consideraremos) la trayectoria tenderá hacia uno de los dos puntos $(\pm 1, 0)$, que ahora son atractores puntuales: focos (o, en el caso sobreamortiguado $\gamma > \sqrt{8}$, nodos) asintóticamente estables.

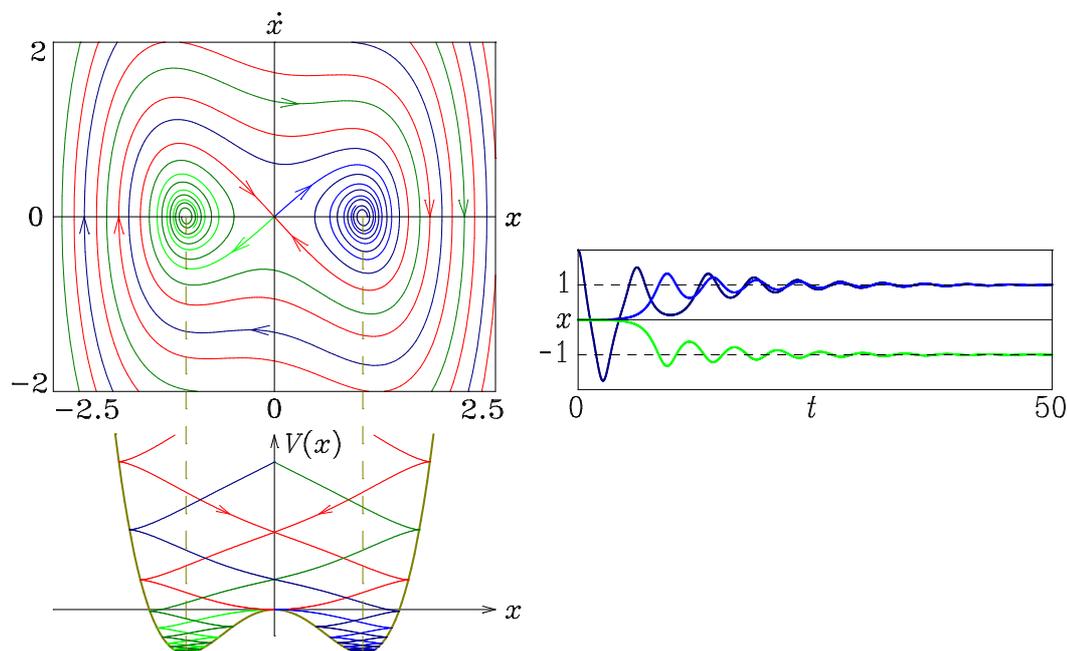


Figura 50 Espacio de fases y algunas soluciones para $\gamma = 0, 2$ y $f = 0$.

El origen $(0, 0)$ sigue siendo un punto de ensilladura inestable, pero ahora las variedades estable e inestable no coinciden. En esta última existen dos trayectorias que salen (en $t \rightarrow -\infty$) del origen y tienden hacia uno de los atractores.

Las dos órbitas de la variedad estable que entran en el origen (en $t \rightarrow \infty$) son más interesantes, ya que al no ir a ninguno de los dos atractores constituyen la frontera entra las cuencas de atracción de éstos.

Oscilaciones forzadas

En presencia de fuerza externa los puntos de equilibrio son imposibles, pero el carácter periódico de la fuerza permite las soluciones periódicas, que ahora, a

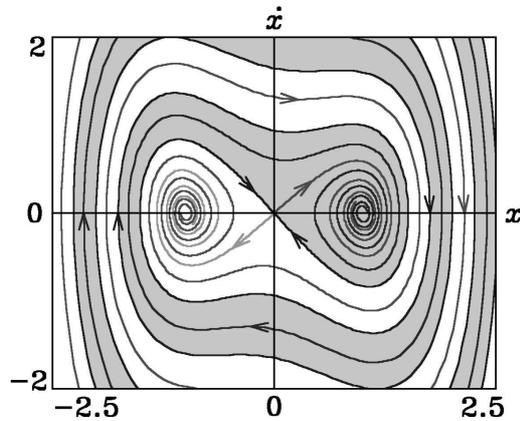


Figura 51 Cuencas de atracción para $\gamma = 0,2$ y $f = 0$.

diferencia de lo que ocurría en el caso conservativo donde hay un conjunto infinito de oscilaciones con períodos dependientes de la amplitud (es decir, de la energía), serán oscilaciones aisladas con un período compatible con el de la fuerza externa. Es bien conocido lo que pasa en el caso lineal: tras un transitorio definido por las condiciones iniciales se pierda la memoria de éstas y la evolución entra en un régimen periódico permanente. Lo mismo sucede con el oscilador de Duffing para $\gamma = 0.2$ y $f = 0.23$: las soluciones tienden a uno de los dos atractores periódicos, las dos órbitas periódicas que abrazan cada uno de los desaparecidos puntos de equilibrio en $(\pm 1, 0)$.

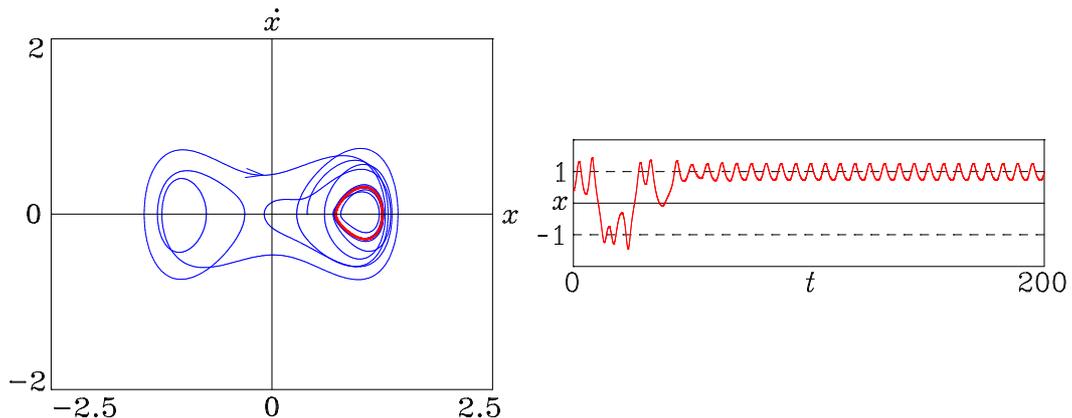


Figura 52 Una solución para $\gamma = 0.2$ y $f = 0.23$.

Estrictamente hablando, hace falta un tiempo infinito para que la solución alcance uno de los dos atractores³, mas desde cualquier punto de vista práctico, a partir de cierto momento, a menudo no muy lejano, puede considerarse que la solución se encuentra ya en el atractor y que se ha alcanzado el régimen permanente: una oscilación periódica.

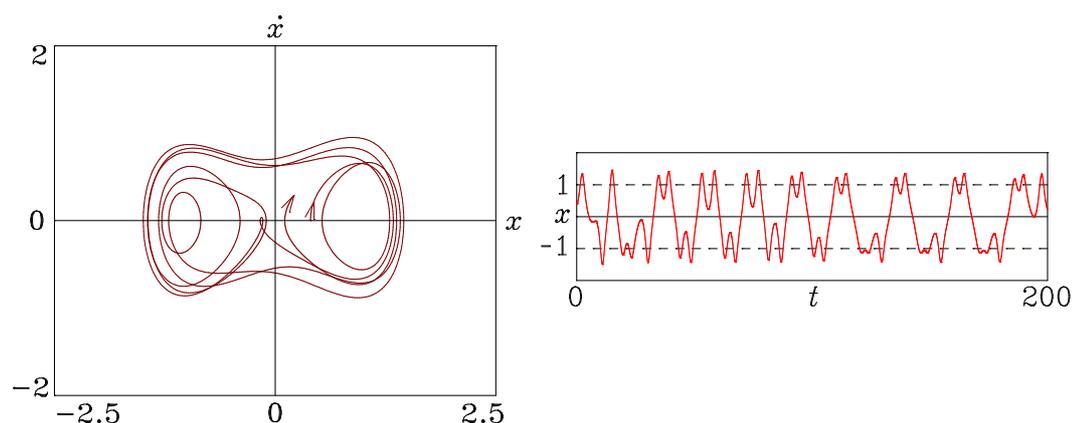


Figura 53 Una solución para $\gamma = 0.2$ y $f = 0.3$.

Oscilaciones caóticas

Al aumentar la intensidad de la fuerza externa la naturaleza de la evolución cambia por completo: las órbitas periódicas parecen desaparecer y las soluciones oscilan sin cesar, pero sin que se advierta ninguna regularidad.

Atractores caóticos

Además de la aparente irregularidad de la solución el sistema exhibe en este caso una propiedad que suele tomarse como definición de caos determinista: **dependencia extrema con respecto a las condiciones iniciales**. En efecto veamos lo que sucede si se consideran dos conjuntos de condiciones iniciales muy próximos en $t = 0$: $(x, \dot{x}) = (0.4, 0)$ y $(x, \dot{x}) = (0.40001, 0)$. Las soluciones son inicialmente indistinguibles a la resolución de la figura 54, pero luego se separan muy rápidamente.

Es fácil comprender dónde está la obstrucción a la predicción: si el sistema es caótico, en la evolución los inevitables errores cometidos al determinar las condi-

³En la figura 52 sólo se ha dibujado el atractor de la derecha, pero es evidente que, al ser el sistema dinámico invariante bajo reflexiones $x \leftrightarrow -x$, existe uno simétrico a la izquierda.

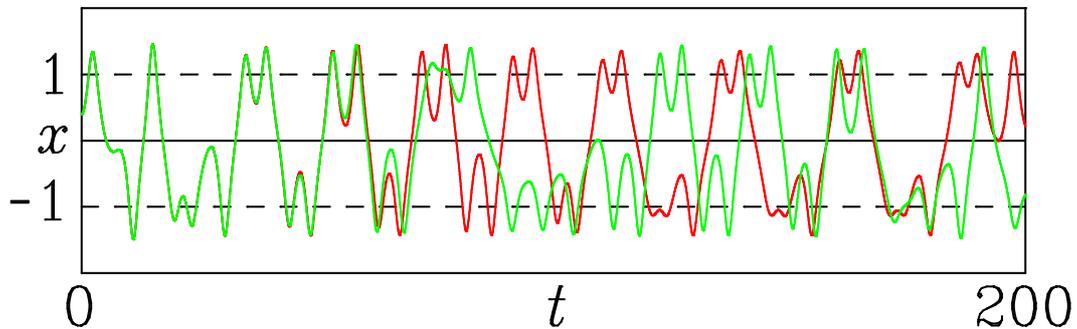


Figura 54 Dos soluciones inicialmente muy próximas para $\gamma = 0.2$, $f = 0.3$.

ciones iniciales crecerán de forma dramática. De hecho, mientras las soluciones se mantienen aún muy próximas, la distancia entre ellas crece como $e^{\lambda t}$, siendo λ el máximo exponente de Liapunov del sistema dinámico. Este obstáculo a la predicción se conoce con el nombre de efecto mariposa desde que uno de los padres de la disciplina, Edward Lorenz, diera una charla con el provocativo título de «¿Puede el batir de las alas de una mariposa en Brasil dar lugar a un tornado en Texas?».

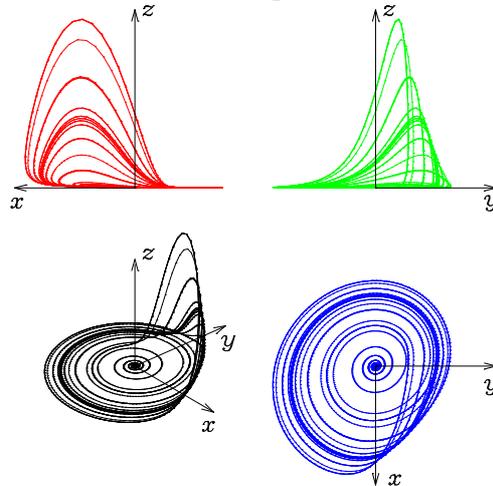


Figura 55 Proyecciones de una órbita del atractor de Rössler.

Atractores extraños

Existe un ejemplo más artificial que permite comprender mejor uno de los mecanismos fundamentales del caos: el sistema de Rössler, que se escribe como

$$\dot{x} = -y - z, \quad (5.5)$$

$$\dot{y} = x + by, \quad (5.6)$$

$$\dot{z} = b + (x - a)z \quad (5.7)$$

y que estudiaremos cuando $a = 4.5$ y $b = 0.2$. Una órbita típica puede verse en la figura 55 donde se recogen las tres proyecciones cartesianas y otra a lo largo de la dirección $(\theta, \varphi) = (59^\circ, -41^\circ)$. También en este caso vemos una órbita irregular, no periódica, que se mantiene en un subconjunto del espacio de fases tridimensional. De hecho observamos que una parte importante del tiempo está cerca del plano (x, y) donde la dinámica será aproximadamente la correspondiente a tomar $z = 0$ en las ecuaciones (5.5)–(5.6):

$$\dot{x} = -y, \quad (5.8)$$

$$\dot{y} = x + by. \quad (5.9)$$

Esto explica cómo se mueve el sistema cerca del plano $z = 0$ en una espiral hacia

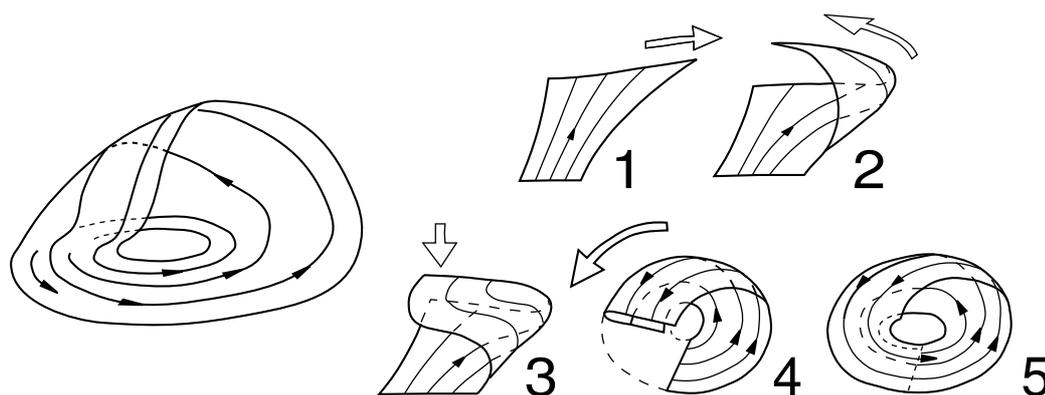


Figura 56 La transformación del panadero.

fuera, hasta que cerca del semieje positivo x el valor de x es lo suficientemente grande como para hacer $\dot{z} > 0$ en (5.7). Entonces z empieza a aumentar hasta que, bastante antes de llegar al semieje negativo x , $\dot{z} = b + (x - a)z$ se hace negativo y z comienza a decrecer de forma que la órbita vuelve a las cercanías del plano $z = 0$. Cerca de la espiral $z \approx 0$ y durante los tramos en que \dot{z} es positivo la distancia entre soluciones muy próximas crecerá exponencialmente, es decir, habrá dependencia sensible de las condiciones iniciales. Como se ve en la figura 56, las órbitas se separan entre sí y las que están en una cierta banda cerca de $z = 0$ se hallarán en una banda que sigue ensanchándose cuando $\dot{z} > 0$, pero que luego se repliega sobre la banda que hay cerca del plano (x, y) . Este doble proceso de estirar (para separar

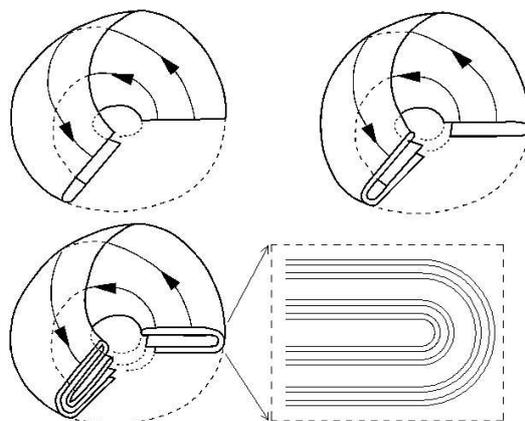


Figura 57 Estructura del atractor de Rössler.

exponencialmente las órbitas) y **plegar** (para que la región visitada del espacio de fases se mantenga acotada) es uno de los mecanismos fundamentales del caos determinista y —siguiendo la tendencia de la ciencia de la sociedad de consumo a elegir, en perjuicio de las lenguas clásicas, nombres chocantes o con supuesto gancho publicitario— se llama **transformación del panadero** en evocación del proceso de homogeneización de los componentes de una masa de pastelería por medio del rodillo que estira la masa y del plegamiento de la misma sobre sí misma para que mantenga dimensiones manejables.

Además de generar en el proceso de estiramiento un exponente de Liapunov positivo, que hace que el atractor sea caótico, la transformación del panadero es también responsable de la estructura del tipo de la del conjunto de Cantor —que recordaremos en el apartado 5— del atractor que hace de él un atractor extraño. En efecto, como éste es un conjunto invariante que se repliega sobre sí mismo una y otra vez, debe estar formado por un número infinito de capas de espesor nulo, ya que el atractor tiene volumen nulo por ser el sistema disipativo y perderse constantemente volumen del espacio de fases. Este conjunto infinito de capas que se esboza en la figura 57 le da al atractor su estructura fractal.

También en el caso de la ecuación de Duffing (5.3) tenemos un atractor caótico y extraño, aunque el mismo no es fácil de visualizar en proyecciones como las de la figura 55. Con $f \neq 0$ el espacio de fases es tridimensional pero la tercera variable, t , sólo aparece en el argumento de un coseno, por lo que la correspondiente dimensión es cíclica y se representa de forma natural mediante un ángulo

$0 \leq \varphi \equiv t \pmod{2\pi} < 2\pi$. Para visualizar el atractor, es útil considerar una sección estroboscópica del mismo para valores $t = t_0 + 2n\pi$, ($n = 0, 1, \dots$), es decir dibujaremos el corte del atractor con el plano $\varphi = t_0$.

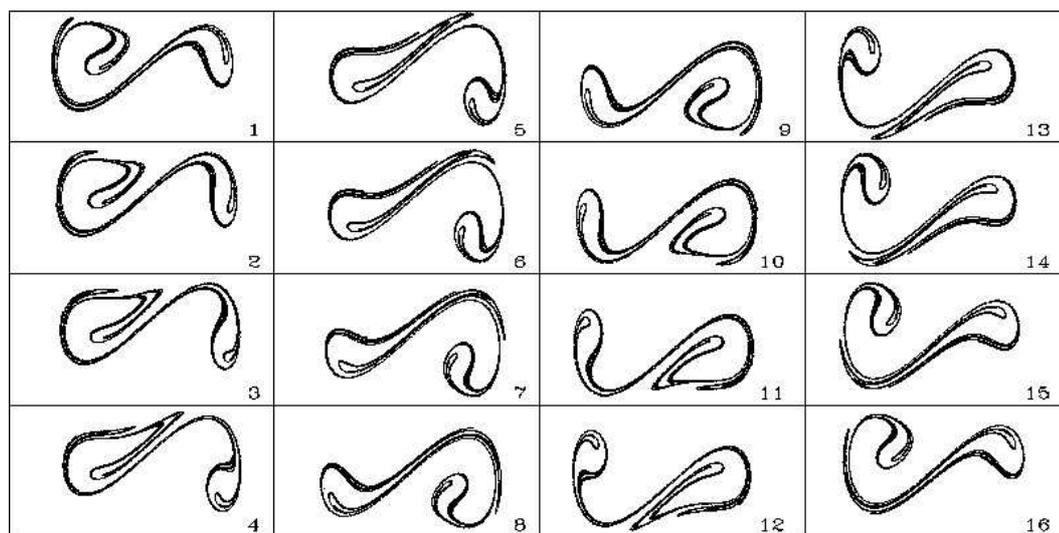


Figura 58 Secciones estroboscópicas del atractor de Duffing.

El propio atractor en el espacio de fases tridimensional es, como todo atractor, un conjunto invariante; pero en la figura 58 vemos 16 de esas secciones para $t_0 = (k - 1)\pi/8$, ($k = 1, 2, \dots, 16$), que nos muestran la evolución de la sección estroboscópica con el tiempo. Si observamos con atención la secuencia de secciones, podemos observar con claridad la transformación del panadero en acción: el atractor se va estirando, al tiempo que se pliega sobre sí mismo. Esto produce la divergencia exponencial de las soluciones y la estructura fractal del atractor, con un número infinito de capas.

Esa compleja estructura, con una invariancia de escala que, aunque aproximada, recuerda la exacta que poseen los conjuntos de Cantor, puede entrecerse en las sucesivas ampliaciones de partes de la sección $t_0 = 0$ que se muestran en la figura 59.

Fractales

Recordemos cómo se define el conjunto ternario de Cantor, que hemos mencionado en varias ocasiones. De un segmento se retira su tercio central, en los dos segmentos que quedan se retira el tercio central, y así sucesivamente. El

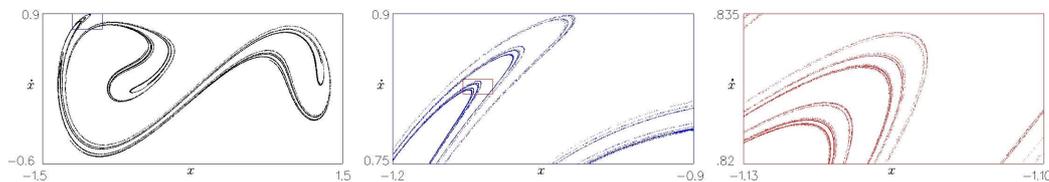


Figura 59 Ampliaciones de la sección estroboscópica para $t \bmod 2\pi = 0$.

conjunto que queda en el límite de este proceso repetitivo tiene propiedades sorprendentes. Es fácil de mostrar que tiene tantos puntos como el segmento original, porque puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los puntos de ambos conjuntos. En cambio, su longitud (su medida de Lebesgue) es nula, como se ve sumando las longitudes de los segmentos retirados. Es un fractal, porque su dimensión, que definiremos luego, es $0 < \ln 2 / \ln 3 < 1$. Además, presenta una invariancia de escala obvia: cada segmento de cada paso en el proceso de construcción es semejante al segmento de partida.

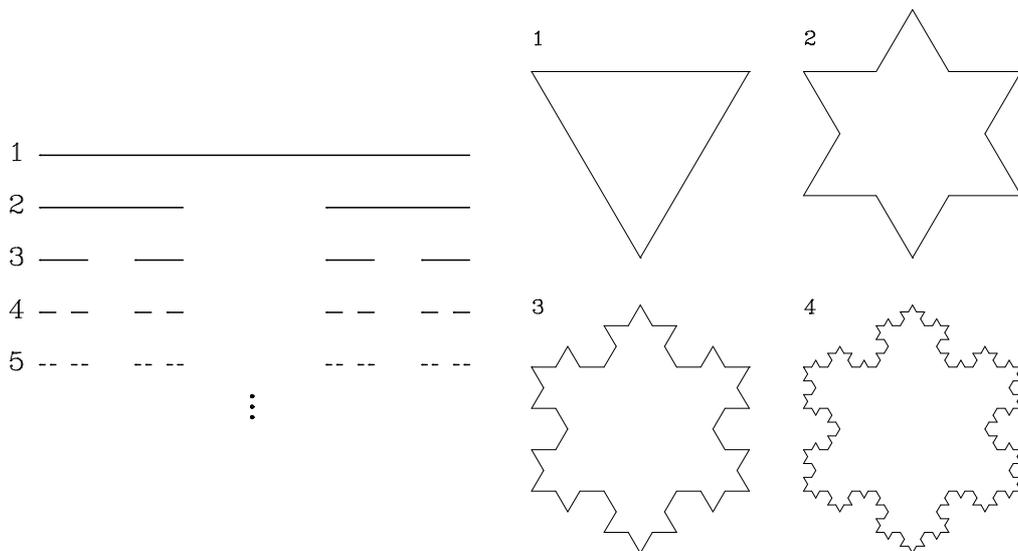


Figura 60 Construcción del conjunto ternario de Cantor y del copo de nieve de von Koch.

Es éste el más simple, pero no el único, de los objetos autosemejantes con propiedades sorprendentes conocidos en geometría desde el siglo XIX. Otro ejemplo famoso es el copo de nieve de von Koch, que se construye dividiendo en

tres cada lado de un triángulo equilátero y sustituyendo su tercio central por otros dos segmentos que con el formarían un triángulo equilátero. El proceso se repite, una y otra vez, con cada segmento. El límite es una curva continua, sin derivada en ningún punto, de longitud infinita y que encierra un área finita.

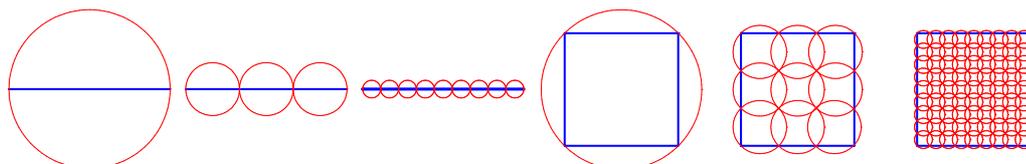


Figura 61 Recubrimientos de un segmento y un cuadrado.

Dimensión fractal

Para medir cuantitativamente la complejidad de un fractal puede usarse una definición apropiada de dimensión. La que mejores propiedades matemáticas tiene es la dimensión de Hausdorff, pero es más fácil de entender —y más útil en aplicaciones prácticas— la llamada **capacidad** que se define como sigue. Para recubrir un segmento de longitud l se necesita un único disco de diámetro $d = l$, $N = 2$ discos de diámetro $d = l/2$ y, en general, $N = l/d$ discos de diámetro d . Puesto que la dimensión del segmento es $D = 1$, el número de discos de diámetro d necesarios para recubrirlo es

$$N(d) = Kd^{-D} \quad (5.10)$$

donde la constante K debe elegirse adecuadamente: la longitud l en este ejemplo. Es fácil convencerse de que la misma fórmula es aplicable para recubrir un cuadrado con discos y $D = 2$, para recubrir un cubo con bolas y $D = 3$ y, en general, para recubrir cualquier conjunto *normal*. En consecuencia, como generalización se define la capacidad mediante el límite

$$D = -\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln N(d)}{\ln d}, \quad (5.11)$$

siendo $N(d)$ el número de bolas necesarias diámetro d necesarias para recubrirlo. No es difícil demostrar (usando la invariancia de escala) que en el caso del copo de nieve de von Koch se obtiene $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.26186$. Como la dimensión de este conjunto es superior a su dimensión topológica, se dice que es un fractal.

Fronteras fractales entre cuencas de atracción

Los atractores de la ecuación de Duffing (5.3) para $\gamma = 0.2$, $\omega = 1$ y $f \leq 0.13$ no son caóticos, sino ciclos límite periódicos; pero como son dos, uno alrededor

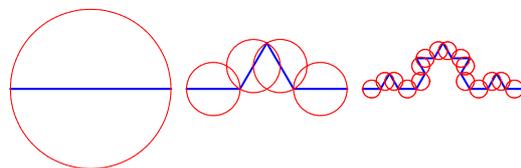


Figura 62 Recubrimientos de la curva de von Koch.

de cada mínimo del potencial, para predecir el futuro habrá que saber en cuál de las cuencas de atracción se encuentran las condiciones iniciales. Para dibujar la proyección de las cuencas de atracción, elegiremos siempre las condiciones iniciales en $t = 0$, de forma que si entonces la posición es $x = x_0$ y la velocidad $\dot{x} = \dot{x}_0$ y la solución tiende hacia el atractor de la derecha, dibujaremos en negro el punto de coordenadas (x_0, \dot{x}_0) , que quedará en blanco si la solución tiende al atractor de la izquierda.

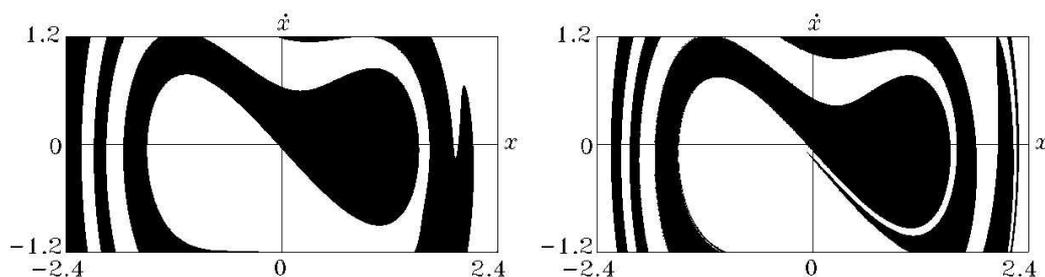


Figura 63 Cuencas de atracción de la ecuación de Duffing-en para $f = 0.1, 0.15$.

En los dos casos de la figura 63 podemos observar —si olvidamos el efecto debido a la resolución finita del cálculo— que las cuencas de atracción no son demasiado distintas de la del caso $f = 0$ recogido en la figura 51 y están separadas por una frontera lisa. Si el error al determinar las condiciones iniciales es d , no estaremos seguros de hacia qué atractor irán los puntos que se encuentren a una distancia d o menor de la frontera entre cuencas. Para saber cuántos son esos puntos dudosos, recordemos que el número de discos de radio d que hacen falta para recubrir la frontera es $N(d) \propto d^{-D}$ mientras que para recubrir la parte de espacio de fases mostrada es $N(d) \propto d^{-F}$, siendo D y F las dimensiones de la frontera y el espacio de fases, respectivamente. En consecuencia la proporción de condiciones iniciales dudosas será d^{F-D} y el exponente de incertidumbre $z = F - D$. Si

la frontera es lisa, tendremos $D = F - 1$ y $z = 1$, de forma que para disminuir en un factor 10, por ejemplo, la proporción de condiciones iniciales de futuro dudoso, debemos mejorar en el mismo factor la calidad de la medida de las mismas.

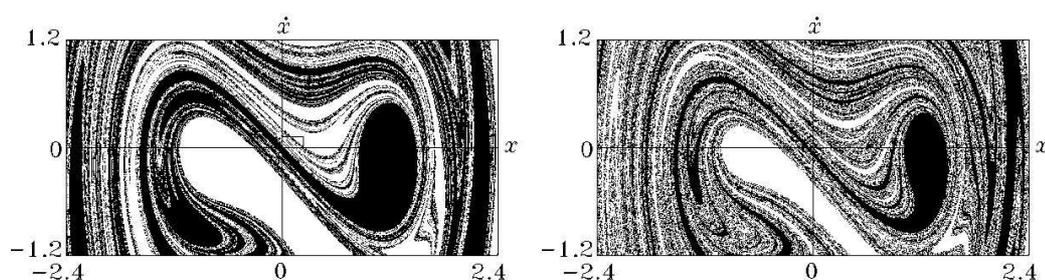


Figura 64 Cuencas de atracción de la ecuación de Duffing-en para $f = 0.2, 0.23$.

Sin embargo, si la frontera fuese fractal, tendríamos $F - 1 < D < F$ y para ganar ese mismo factor habría que hacer un esfuerzo mucho mayor. Por ejemplo, si tuviéramos $D = F - 0.2$ para reducir en un factor 10 la proporción de condiciones iniciales dudosas habrá que reducir 10^5 veces el error cometido al determinarlas. Es claro el obstáculo a la predicción que esto supone, incluso si el sistema no tiene atractores caóticos. En la ecuación de Duffing, tenemos fronteras fractales entre cuencas de atracción para $f = 2$ y $f = 2.3$, por ejemplo, como se intuye en la figura 64 y, con más claridad, en la figura 65.

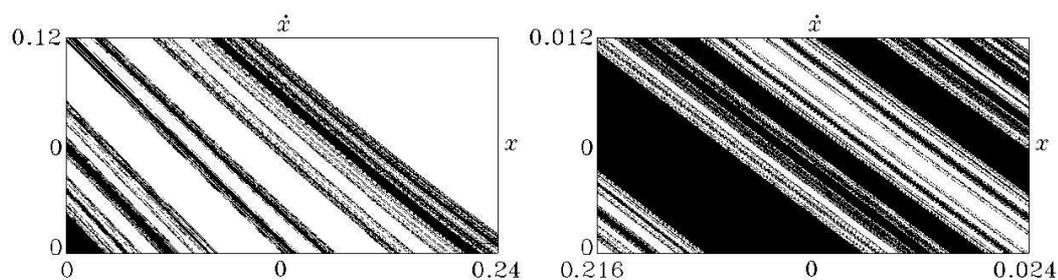


Figura 65 Ampliaciones de la cuencas de atracción de la ecuación de Duffing para $f = 0.2$.

Dispersión caótica

Es éste otro aspecto del caos, en el que en vez de un atractor extraño existe

un conjunto invariante extraño no atractivo. Como en la dispersión el movimiento asintótico es libre resulta muy simple, pero aun así puede ser difícil de predecir.

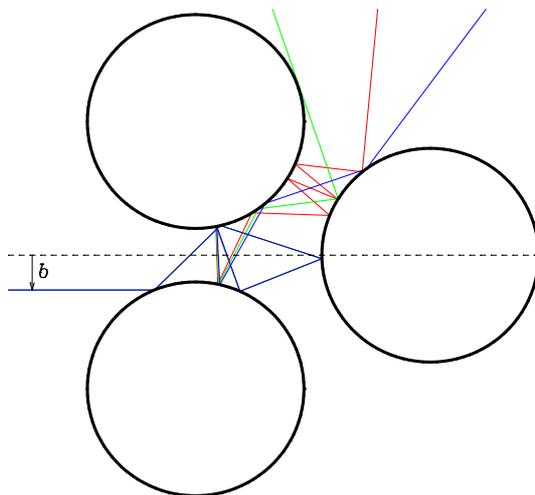


Figura 66 Tres discos rígidos y tres órbitas.

Nos limitaremos a considerar uno de los casos más sencillos en dos dimensiones: tres discos rígidos inmóviles contra los que se envía una partícula puntual que colisiona elásticamente con los discos hasta que consigue salir de entre ellos. Se desprecia el rozamiento. Los discos de radio unidad están colocados en los vértices de un triángulo equilátero de lado 2.5.

Supongamos que se envía una partícula puntual a lo largo de una recta paralela a un eje de simetría y que dista de él un **parámetro de impacto** b . Al salir de la región de interacción, lo hará en una cierta dirección dada por el ángulo de dispersión θ que forma su velocidad con el eje. En la figura 66 se han dibujado las trayectorias de las partículas con $b = -0.325 + n10^{-5}$ para $n = 0, 1, 2$. Aún siendo inicialmente indistinguibles, los ángulos de dispersión son bien distintos.

Como la dirección de salida depende del parámetro de impacto b , tendremos una **función de dispersión** $\theta(b)$, que como se ve en la figura 67, tiene trozos continuos y otros que aparentan ser discontinuos, como lo muestran las sucesivas ampliaciones de la figura 67: el conjunto de puntos de discontinuidad de $\theta(b)$ tiene una estructura fractal análoga a la del conjunto de Cantor. Al igual que sucedía con las fronteras fractales entre cuencas de atracción, aun cuando el movimiento final es

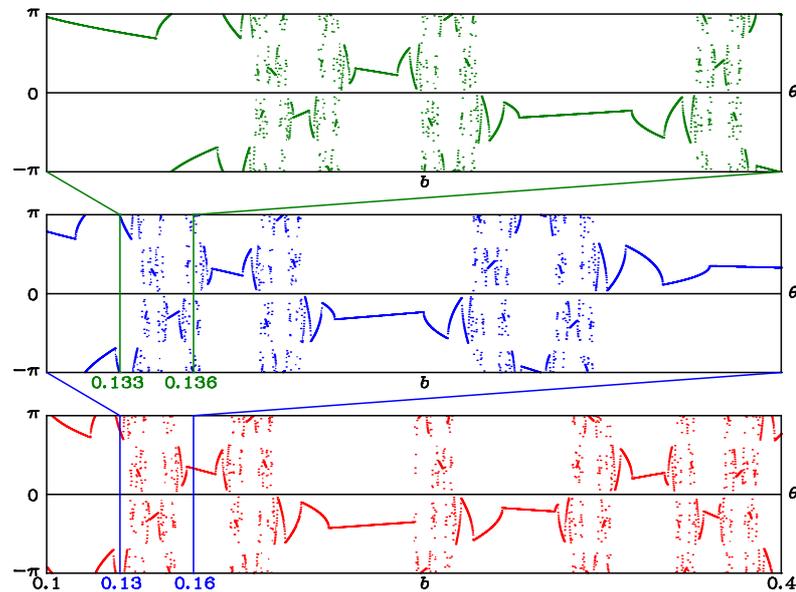


Figura 67 Función de dispersión.

muy sencillo, puede resultar muy difícil prever el futuro si el parámetro de impacto que nos interesa está muy cerca de uno de los puntos de discontinuidad. Debería ser claro que la definición e interés del coeficiente de incertidumbre del anterior apartado puede aplicarse aquí casi al pie de la letra.

Para comprender mejor el fenómeno, hemos dibujado en la figura 68 el número de choques que sufre la partícula antes de salir de la región de dispersión. Puede apreciarse que ese número es claramente superior cerca de los puntos de discontinuidad de la función de dispersión. La razón estriba en considerar las órbitas periódicas que puede tener una partícula que estuviera desde siempre y para siempre rebotando entre discos. Dichas órbitas son infinitas pero inestables. Una órbita de dispersión como las que hemos considerado no será nunca periódica, pero puede mantenerse muy cerca de una órbita periódica durante un número importante de choques. Si dos órbitas inicialmente muy próximas sufren por ese motivo un número grande de choques, pueden acabar saliendo en direcciones bien distintas, ya que la distancia entre ellas es ampliada en cada choque, lo que a su vez puede hacer variar el número de choques. Ésta es por tanto la razón del obstáculo a la predicción: el conjunto invariante que engloba las órbitas periódicas no es atractivo, pero amplía la distancia entre órbitas inicialmente muy próximas que pasen

cerca del mismo.

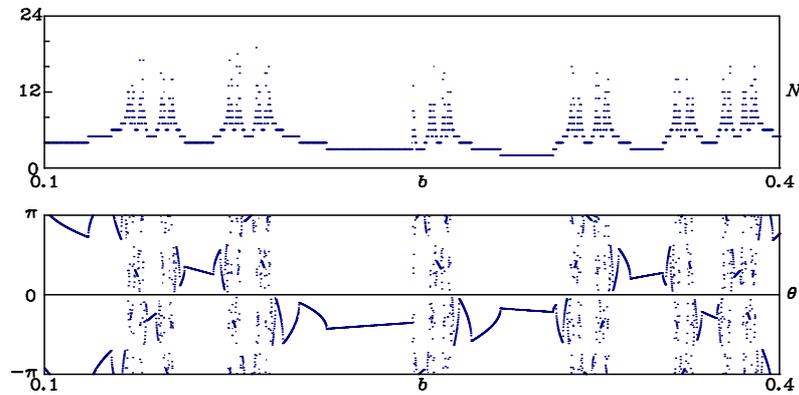


Figura 68 Ángulo de dispersión y número de choques.

Otros aspectos del caos

En la somera introducción al caos hecha en las anteriores páginas no ha sido posible mencionar más que un número limitado de aspectos del mismo. No queremos, sin embargo, dejar de citar algunos de los otros temas de interés en la disciplina. Así, nada se ha dicho sobre uno de los temas de investigación más activo en los últimos años y que tiene un gran interés práctico: el control del caos. La dinámica simbólica permite extraer importantes consecuencias de complejos sistemas dinámicos: por ejemplo, permite analizar las órbitas periódicas inestables responsables de la dispersión caótica del apartado 5. Para los físicos resulta de gran interés la traducción del caos de la mecánica clásica a la mecánica cuántica, donde las ecuaciones de evolución son lineales y, por ello, no caóticas. También resultan útiles las generalizaciones de las técnicas del grupo de renormalización, que tan fructíferas han sido en física de la materia condensada y en altas energías: permiten entender la aparición de números universales, es decir, ampliamente independientes del sistema dinámico particular analizado. Por fin, digamos que sistemas caóticos han sido usados en libros, cine y diseño por ordenador para generar un cierto tipo —bastante peculiar— de belleza.

Bibliografía

Textos de introducción

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke, “Chaos: An Introduction to Dy-

namical Systems”, Springer, New York (1996).

[2] M. W. Hirsch, S. Smale and R. Devaney, “Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos”, Academic Press, New York (2003).

[3] S. H. Strogatz, “Nonlinear dynamics and chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering (Studies in Nonlinearity)”, Perseus Publishing, Boulder, CO (2000).

Textos avanzados

[4] M. C. Gutzwiller, “Chaos in Classical and Quantum Mechanics”, Springer, New York (1990).

[5] E. A. Jackson, “Perspectives of nonlinear mechanics” Vols. 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[6] E. Ott, “Chaos in dynamical systems”, 2nd Ed. Cambridge University Press, Cambridge (2002).

[7] H. G. Schuster, “Deterministic Chaos”, 3rd Ed. Wiley, New York (1995).

Libros de divulgación

[8] D. Ruelle, “Azar y Caos”, Alianza, Madrid (1993).

[9] E. N. Lorenz, “La esencia del caos”, Debate, Madrid (1995).

[10] J. Gleick, “Caos: la creación de una ciencia”, Seix-Barral, Barcelona (1994).

[11] A. Escotado, “Caos y orden”, Espasa, Madrid (1999).

