Gauss y la geometría.
Geodesia y Geometría no Euclidiana

por

Agustí Reventós, Carlos J. Rodríguez, Universitat Autónoma de Barcelona

1. Geometría euclidiana

Empecemos[1] reproduciendo las palabras que Gauss usa en una carta[2] a su amigo Gerling, el 6 de enero de 1819, para explicarle como descubrió la posibilidad de construir el polígono regular de diecisiete lados con regla y compás. Se ve claramente, en esta redacción, la mucha estima en que Gauss tenía este resultado, el primero de los suyos que vio publicado.

> *La historia de este descubrimiento no la he explicado en ningún sitio hasta ahora, pero puedo indicarla exactamente.*
>
> *Fue el* 29 *de marzo de* 1796*, y la casualidad no influyó en absoluto. Todo*

[1]Este trabajo es una traducción resumida del que los autores escribieron en catalán a raíz de la Jornada Gauss, organizada el 15 de febrero de 2006, por la Facultad de Matemáticas y Estadística de la UPC. Queremos agradecer a los profesores Miguel Muñoz y Sebastiá Xambó, la oportunidad que nos dieron de participar en la jornada así como el permiso de edición de la presente traducción. Agradecemos también a Enric Nart y Jerome Sherer la ayuda en la traducción de algunos pasajes del alemán al catalán.

También corresponde a la conferencia pronunciada el 14 de Febrero de 2007 en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del País Vasco, dentro de la actividad *Un paseo por la Geometría*, organizada por Raúl Ibáñez y Marta Macho, a quienes agradecemos profundamente la oportunidad que nos han brindado de participar en ella.

[2][9], Vol. 10, pág 125.

> *estaba en dividir las raíces de la ecuación*
>
> $$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$
>
> *en dos grupos [...]*
>
> *A partir de esforzadas meditaciones entre las conexiones de las raíces y los fundamentos de la aritmética, feliz por unas vacaciones en Braunschweig, la mañana de aquel día, antes de levantarme, tuve la suerte de ver con gran claridad toda esta correlación, de manera que allá mismo y inmediatamente apliqué al heptadecágono la correspondiente confirmación numérica.*

El resultado fue enunciado en la columna *Neue Entdeckungen* (Nuevos descubrimientos) de *Intellegenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung*, el 1 de Junio de 1796, por A. W. Zimmermann, profesor de Gauss en el Collegium Carolinum de Braunschweig. Reproducimos el escrito de Gauss y la presentación de Zimmermann.[3]

> *Como todo principiante en geometría sabe, hay diversos polígonos regulares, por ejemplo, el triángulo, tetrágono, pentágono,* 15*-gon, y aquellos que se obtienen doblando el número de lados de alguno de ellos, que son geométricamente construibles.*
>
> *Esto ya se sabía desde los tiempos de Euclides, y parece que se ha dicho desde entonces que el campo de la geometría elemental no va más allá: al menos yo no conozco ningún intento exitoso de extender sus límites en esta dirección.*
>
> *Con más razón, el descubrimiento merece atención... que a parte de aquellos polígonos regulares hay otros, por ejemplo el* 17*-gon, que se pueden construir geométricamente. Este descubrimiento es, en realidad, sólo un caso especial de una teoría más general, aún no completada, y que se presentará al público en cuanto lo esté.*
>
> CARL FRIEDRICH GAUS
>
> *Estudiante de Matemáticas en Göttingen*
>
> *Es importante remarcar que el Sr. Gauss tiene ahora* 18 *años, y se dedica aquí en Braunschweig con igual éxito a la filosofía y a la literatura clásica así como a la alta matemática.*
>
> 18 *Abril,* 1796 E. A. W. ZIMMERMANN, *Prof.*

[3] [6], pág. 28.

El día siguiente al que vio *con gran claridad* la construcción del polígono de 17 lados, es decir, el 30 de Marzo de 1796, empieza su famoso *Diario*, un mes antes de cumplir 19 años.

Las entradas [1],[3],[55],[65],[66],[116] hacen referencia a polígonos.

Lemniscata. Ideas parecidas se pueden aplicar a la división con regla y compás de la lemniscata en partes de igual longitud. Señalemos solamente que las entradas [51],[60],[62],[63],[92],[108],[146] hacen referencia a la lemniscata. Justamente la [146] es la última: 9 de Julio de 1814.

2. Geometría no euclidiana

Según el propio Gauss, se preocupa antes de los fundamentos de la geometría que del polígono de 17 lados. En efecto, en una carta a Schumacher (28 − 09 − 1846) dice:

> *Lo que Schweikart llamó* geometría astral*, Lobatchevski lo llama* geometría imaginaria*. Sabes que durante* 54 *años he compartido los mismos puntos de vista. No he encontrado nada nuevo para mí en el trabajo de Lobatchevski. Pero su desarrollo, en un verdadero espíritu geométrico, es diferente del camino que yo seguí.*

Estábamos, pues, en 1792 y ¡Gauss tenía 15 años!

La publicación de esta carta, justo después de la muerte de Gauss, el 1855, donde pondera positivamente el trabajo de Lobatchevski, causó una fuerte impresión en la comunidad matemática europea. A partir de aquel momento la Geometría no Euclidiana empezó a ser universalmente aceptada.

En una carta a Gerling (10 − 10 − 1846) comenta:

> *El teorema que el Sr. Schweikart le menciona a usted, que en cualquier geometría la suma de todos los ángulos exteriores de un polígono difiere de* 360° *por una cantidad, [....] que es proporcional al área, es el primer teorema que se encuentra en el umbral de esta teoría, un teorema la necesidad del cual reconocí ya en* 1794.

¡Tenía, entonces, 17 años!

Las entradas del *Diario* que hacen referencia a los fundamentos de la geometría son:

> [72] 28 de Julio de 1797. *He demostrado la posibilidad del plano.*
>
> [99] Setiembre de 1797. *Hemos hecho excepcionales progresos en los principios de la Geometría.*

2.1. Teoría de las paralelas

Probablemente por el problema de la consistencia, no publicó nada sobre este tema. No obstante, después de su muerte se encontraron entre sus papeles unos escritos inacabados sobre teoría de las paralelas, probablemente de 1831 (54 años).[4]

Pero conocemos lo que pensaba sobre este tema por sus cartas a amigos y colegas, las cuales comentaremos brevemente en la sección 3. No obstante, todos los resultados de geometría *astral* que aparecen en estas cartas se pueden deducir directamente de la *analogía de Lambert* (cosa que Gauss no dice en ningún momento).

2.2. La analogía de Lambert

Lambert (1728 – 1777) sugiere que la geometría del ángulo agudo corresponde a la geometría sobre una esfera de radio imaginario.[5]

Está bien establecido que Gauss consulta la obra de Lambert en la biblioteca de Göttingen el 24 de octubre de 1795 y el 2 de enero de 1797.[6] Taurinus (1794 – 1874) fue el primero en desarrollar la *analogía*, siguiendo las ideas de su tío Schweikart. Llegó al ángulo de paralelismo. Gauss, en una extensa carta, le reconoce el mérito, pero al atribuirse sus conclusiones frustró la carrera de un matemático con talento.

2.3. Esfera de radio R

Recordemos tres resultados importantes de la geometría de una esfera de radio$R$.

Teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo de catetos b, c e hipotenusa a, se cumple que:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}\,.$$

Área de un triángulo. El área de un triángulo esférico de ángulos α, β, γ está dada por la fórmula

$$\begin{aligned}\text{Área del triángulo} &= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\\ &= R^2\cdot\ \text{Exceso.}\end{aligned}$$

Longitud de la circunferencia. Finalmente, la longitud de una circunferencia esférica de radio r, medida obviamente sobre la esfera, está dada por la fórmula

$$L = 2\pi\rho = 2\pi R\sin\alpha = 2\pi R\sin\frac{r}{R},$$

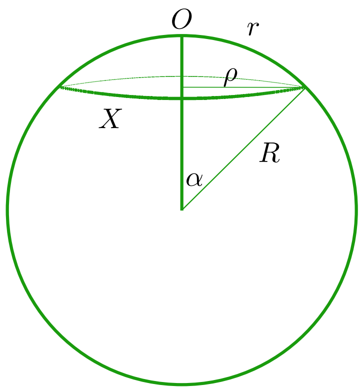
[4]Ved [9], Volum VIII, pág. 202 – 209, o [2], pág. 67 – 75.

[5]Ved [21].

[6]Justamente el año de las entradas 72 y 99 del *Diario.*

donde la relación entre ρ, r y α está dada en el dibujo siguiente.

Observamos, en el mismo dibujo, que los puntos del paralelo de colatitud α están a distancia $r = R\alpha$ del polo norte O.



2.4. Esfera de radio infinito

El teorema de Pitágoras sobre la esfera de radio R, cuando R se hace grande, da lugar a la aproximación

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} \sim (1 - \frac{b^2}{2R^2}) \cdot (1 - \frac{c^2}{2R^2}),$$

y, por tanto, en una esfera de radio infinito el teorema de Pitágoras queda reducido a

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Área de un triángulo. La fórmula del área del triángulo en una esfera de radio R da lugar, cuando R tiende a infinito, a

$$\text{Área} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = \infty \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Si asumimos que el área del triángulo es finita, tenemos

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Longitud de la circunferencia. La fórmula de la longitud de la circunferencia es

$$L = 2\pi R \sin \frac{r}{R} \sim 2\pi\, r.$$

Es decir, hemos reencontrado tres resultados bien conocidos de la geometría euclidiana plana.

2.5. Esfera de radio Ri

Como la substitución formal de R por ∞ nos ha dado buenos resultados, seamos ahora un poco más atrevidos, y substituyamos formalmente R por Ri. Recordemos las relaciones

$$\cos ix = \cosh x, \qquad \sin ix = i \sinh x.$$

Teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras nos dice ahora que en un triángulo rectángulo de hipotenusa a, y catetos b y c, se cumple

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cdot \cosh \frac{c}{R}.$$

Área de un triángulo. El área de un triángulo se transforma en[7]

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (Ri)^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\ &= R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) \\ &= R^2 \cdot \text{ Defecto.} \end{aligned}$$

Por tanto, todos los triángulos de la esfera imaginaria tienen defecto positivo.

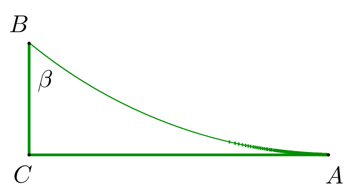
Longitud de la circunferencia. La longitud de una circunferencia está dada por

$$L = 2\pi Ri \sin \frac{r}{Ri} = 2\pi R \sinh \frac{r}{R}.$$

Veamos aún dos consecuencias más.

Ángulo de paralelismo. La analogía permite demostrar fácilmente que en el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ de la figura, de ángulos respectivos α,β,γ, con $\gamma = \pi/2$, se cumple

$$\cos \alpha = \sin \beta \cosh \frac{a}{R}.$$



[7]Justamente esta substitución formal fue la condujo a Lambert a su *Analogía*.

Observemos que si $A \to \infty$, entonces $\alpha \to 0$. Es decir, cuando A se aleja de C, sobre la recta AC, el ángulo α en el vértice A se va haciendo pequeño, y, de hecho, tiende a cero.

En el límite el ángulo β es el ángulo de paralelismo[8] del lado BC, y como depende sólo de la longitud a de este lado, se denota por $\Pi(a)$. Por tanto, la anterior fórmula se transforma en

$$1 = \sin \Pi(a) \cosh \frac{a}{R},$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{\Pi(a) = 2 \arctan e^{-a/R}}$$

que es la famosa fórmula del ángulo de paralelismo.

Rectas infinitas. Análogos argumentos permiten demostrar que las rectas de la esfera imaginaria tienen longitud infinita.

3. Cartas de Gauss sobre geometría no euclidiana

Todos los comentarios sobre geometría no euclidiana que escribió Gauss están contenidos en las siguientes cartas.[9]

Carta a Farkas Bolyai (17 − 12 − 1799)

> *Si se pudiese demostrar la existencia de un triángulo de área tan grande como se quiera, entonces se podría demostrar con todo rigor la totalidad de la geometría euclidiana.*

Carta a Farkas Bolyai (25 − 11 − 1804)

> *He leído tu manuscrito con gran interés y atención, y he gozado completamente de la precisión subyacente. No obstante no quieras mi alabanza que parecería sesgada porqué tu desarrollo de las ideas tiene mucho en común con el mío.*

Carta a Gerling (11 − 04 − 1816)

> *Sería deseable que la geometría euclidiana no fuese cierta, ya que entonces tendríamos una medida universal a priori, por ejemplo, podríamos asumir como unidad del espacio el lado del triángulo equilátero con ángulo* $= 59°59'59'',99999$.[10]

[8]Cualquier semirecta de origen B que forme con la semirecta BC un ángulo menor que $\Pi(a)$ corta la recta AC, y cualquier semirecta de origen B que forme con la semirecta BC un ángulo mayor que $\Pi(a)$ no corta la recta AC.

[9]Todas las cartas que citamos las podéis encontrar en el volumen VIII de [9] entre las páginas 159 y 220. Hay recopilaciones en diversos lugares, por ejemplo, en [4].

[10]Un toque de humor en los trabajos de Gauss.

Carta a Olbers (28 − 04 − 1817)

Cada vez estoy más convencido de que la necesidad física de nuestra geometría euclidiana no puede ser demostrada al menos por la razón humana.

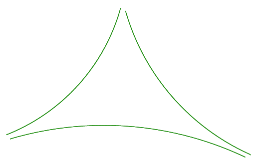
Carta a Gerling (25 − 08 − 1818)

Me alegra que tengáis el coraje de expresaros como si reconocieseis la posibilidad de que nuestra teoría de las paralelas, y con ella toda la geometría, pudiese ser falsa.

Carta a Gerling (16 − 03 − 1819)

Solo quiero remarcar que he desarrollado la geometría astral tan lejos que puedo resolver completamente todos los problemas una vez la constante C está dada.

Y acaba con el dibujo siguiente:



$$\textit{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{(\log \mathrm{hyp}(1+\sqrt{2}))^2}\,.$$

Observemos que log hyp quiere decir logaritmo neperiano, y que la constante que está multiplicando a π (para nosotros R^2, ver la subsección 2.5), aparece al coger como unidad de longitud el segmento que tiene ángulo de paralelismo $\pi/4$, es decir,

$$\Pi(1) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Carta a Taurinus (8 − 11 − 1824)

No tengo nada a decir (o no demasiado) en contra de su intento [de probar el quinto postulado]. *Su presentación de la prueba de que la suma de los tres ángulos de un triángulo no puede exceder de* 180^o *necesita algún retoque, en rigor geométrico.*

Carta a Besel (27 − 01 − 1829)

> *Mi convicción de que no podemos establecer completamente una geometría a priori se ha vuelto más fuerte. Mientras tanto pasará probablemente un tiempo antes que empiece a preparar mis* muy extensas investigaciones *sobre esto para publicarlas; tal vez esto no pasará nunca mientras yo viva ya que temo el griterío de los beocios.*

Los beocios eran los nativos de Beocia, en la antigua Grecia, célebres porque sus ejércitos atacaban gritando. Aquí se aplica a los metafísicos neokantianos.

Carta a Besel (9 – 04 – 1830)

> *Debemos admitir humildemente que si bien el número es meramente un producto de nuestras mentes, el espacio tiene una realidad fuera de nuestras mentes y sus leyes no las podemos saber a priori.*

Carta a Schumacher (17 – 05 – 1831)

> *Hace algunas semanas que he empezado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que provienen de cuarenta años atrás, y de las que nada he redactado, cosa que me ha obligado tres o cuatro veces a empezar de nuevo mi trabajo. No quisiera, pero, que esto muriese conmigo.*

Carta a Schumacher (12 – 07 – 1831)

> *La longitud de una circunferencia de radio r es:*

$$L = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

y comenta que, para que las medidas coincidan con la experiencia, k debería ser infinitamente grande.

Esta redacción la interrumpió el 1832, al conocer el trabajo de János Bolyai.

Carta a Gerling (14 – 02 – 1832)

> *Te comento que he leído estos días un pequeño trabajo de un húngaro, sobre geometrías no euclidianas, que contiene todas mis ideas y resultados, desarrollados muy elegantemente, pero de una manera concentrada difícil de seguir por alguien que no esté familiarizado con el tema. El autor es un joven oficial austríaco, hijo de un amigo de mi juventud, que conocí el* 1798*, y con quien había hablado del tema, pero por aquel entonces mis ideas no habían llegado a la madurez y formación de ahora. Tengo a este joven geómetra, v. Bolyai, como un de los genios más grandes.*

Carta a Farkas Bolyai[11] (6 – 03 – 1832)

> *Ahora déjame decir una cosa sobre el trabajo de tu hijo. Si empiezo diciendo que no lo puedo alabar, quedarás desconcertado. No obstante, no puedo hacer otra cosa: si lo alabase, me alabaría a mí mismo, ya que el total contenido del trabajo, el camino que sigue tu hijo y los resultados a que ha llegado coinciden casi completamente con mis reflexiones de hace treinta o treinta y cinco años.*

¡Cuánto hubiese podido cambiar esta historia si Gauss hubiese hecho pública su muy buena opinión del trabajo de János Bolyai!

Esta relación de las cartas de Gauss sobre geometría no euclidiana se completa con las dos cartas que, muy posteriormente, envió a Schumacher y a Gerling, y que ya hemos comentado al inicio de la sección 2.

4. Geodesia

A pesar de que Gauss ya se había iniciado en la geodesia[12] fue a partir de una carta de Schumacher, del 8 de junio de 1816, cuando empezó a dedicarse a ella muy seriamente. En esta carta Schumacher le pedía ayuda para medir el arco de meridiano entre Skagen y Lauenburg y, eventualmente, extender los cálculos a la región de Hannover. Gauss contesta ilusionado el 5 de julio de 1816, ofreciendo su ayuda. Hacía tiempo que estaba interesado en determinar la forma de la Tierra a partir de datos empíricos, y por lo tanto, la propuesta de Schumacher le iba muy bien.

Hacia 1820 se establece Hohenhagen[13] como punto inicial de la triangulación. Gauss trabaja en esta triangulación de manera exhaustiva hasta aproximadamente finales de 1825, cuando inicia la primera versión del *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, como un primer paso hacia la geodesia avanzada.

La triangulación de Hannover esta formada por 33 vértices (ciudades, montes, ...) y 55 triángulos. Gauss recoge en unas tablas los ángulos de los 51 triángulos y sus defectos.

Por ejemplo, los datos del cuarto triángulo, que es el famoso triángulo Hohenhagen (vértice 3), Brocken (vértice 5), Inselsberg (vértice 6) son:

[11] El original de esta carta se perdió. Pero hay una copia hecha por János Bolyai enviada por su padre a Sartorius el 26 de agosto de 1856, ver [4].

[12] Ved el capítulo 10 de [6].

[13] Hohenhagen es una pequeña montaña de 508 metros de altitud, en Dransfeld, a unos 15 kms de Göttingen.

Nr.	Vértice	Ángulo	Exceso
4	3 5 6	$86^0\ 13'\ 58'', 366$ $53\ \ 6\ \ 45, 642$ $40\ \ 39\ \ 30, 165$ $180\ \ 0\ \ 14, 173$ $-0{,}680$	14".853

Pero Gauss observa "contradicciones" en estas tablas, pues el exceso calculado a partir del área o calculado a partir de los ángulos no coincide. Se propone arreglar estas contradicciones estableciendo un sistema de 51 ecuaciones lineales con 8 ligaduras, que provienen de que ciertos cuadriláteros de la triangulación se pueden descomponer de dos maneras distintas como suma de dos triángulos, que resuelve aplicando el método de los mínimos cuadrados. Después de muchos cálculos resuelve el sistema y obtiene todas las correcciones que se deben aplicar a cada ángulo. Por ejemplo, el triángulo 4 queda así.

Nr.	Vértice	Ángulos compensados	Log. lados
4	3 5 6	$86^0\ 13'\ 58'', 691$ $53\ \ 6\ \ 45, 967$ $40\ \ 39\ \ 30, 195$	5.0252012 4.9291248 4.8400752

4.1. Heliotropo

Se dice que el invento del heliotropo proviene de cuando Gauss estaba en Lüneburg, cerca del mes de octubre de 1818, y vio brillar un rayo de sol que provenía reflejado por la ventana de la iglesia de St. Miguel en Hamburgo (a unos 50 km).

La base de heliotropo es un telescopio montado en una plataforma graduada (similarmente al teodolito) y dos espejos perpendiculares. En la foto siguiente se ve como los espejos perpendiculares giran solidariamente delante del telescopio, por el que se ve sólo uno de los espejos. Así, el rayo de luz reflejado en el espejo superior sale reflejado en la dirección que se ve mirando por el telescopio en el espejo perpendicular.

En julio de 1821 Philipp Rumpf, inspector y mecánico del observatorio de Göttingen, construyó el primer heliotropo.

Heliotropo de F. W. Breithaupt, Kasel, 1835

4.2. Representaciones conformes

Este tema interesó a Gauss desde muy pronto.
Carta a Schumacher (5 − 07 − 1816)

> *He pensado un problema interesante* [para poner en una competición]*: en el caso general, proyectar (aplicar) una superficie dada sobre otra, también dada, de manera que la imagen y la original sean infinitesimalmente similares. Un caso especial se da cuando la primera superficie es una esfera y la segunda un plano. Entonces las proyecciones estereográfica y de Mercator son soluciones particulares.*

Esta pregunta se publica el 1822 en la Real Sociedad Científica de Copenhagen, a instancias de Schumacher. Gauss mismo la contesta el 11 − 12 − 1822, pero no se publica esta respuesta hasta finales de 1825 en Astronomische Abhandlungen, Altona, revista editada por Schumacher. El título acaba con un añadido que dice: *Ab his via sternitur ad maiora*[14], imitación de la frase de Newton en *De quadratura curvarum*, que escribe *et his principiis via ad maiora*, y que fue el preludio, ni más ni menos, que del cálculo de fluxiones.

4.3. Coordenadas isotermales

Al día siguiente de responder su propia pregunta sobre transformaciones conformes (pregunta que hemos comentado en la sección 4.2), es decir, el 12 − 12 −

[14]Camino preparado para cosas más grandes.

1822, escribe en sus notas privadas, que él mismo titula *El estado de mis investigaciones sobre la transformación de superficies,* la siguiente fórmula para la curvatura:

$$k = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right),$$

donde $ds^2 = m(du^2 + dv^2)$ es la métrica de la superficie. Curiosamente, esta fórmula tan importante, y que implica el teorema egregio, no aparece (explícitamente) en el *Disquisiciones*.[15]

Pero Gauss se da cuenta de su importancia y escribe: *La curvatura toma el mismo valor bajo todas las transformaciones de la superficie que dejan el elemento de línea* $m(du^2 + dv^2)$ *invariante.*

De hecho, la demostración de Liouville del teorema egregio, ver por ejemplo [14], pág. 742, pasa por demostrar la existencia de coordenadas isotermales, tal vez el punto que Gauss no tenía suficientemente claro en 1822.

4.4. Geodesia avanzada

Los propósitos de Gauss con la frase *Ab his via sternitur ad maiora*, que hemos comentado en la sección 4.2, finalmente se cumplen, y publica en *Abhanlungen der Königliche Gesellschaft der Wisenschaften zu Göttingen,* dos trabajos, el primero el 1844 y el segundo el 1847, titulados respectivamente *Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodaesie, Erste Abhandlung y Zweite Abhandlung*.[16]

En el primero estudia con todo detalle una transformación conforme entre el elipsoide terrestre y una esfera que lo aproxima. En el segundo estudia trigonometría sobre un elipsoide.

5. Geometría Diferencial

El estudio de la analogía de Lambert que hemos hecho en la sección 2.2 nos lleva, de manera natural, a la conjetura siguiente.

> *Gauss podría haber extendido la analogía de Lambert al terreno de la geometría diferencial, con la idea de encontrar una superficie que representase la esfera imaginaria.*

Esta esfera, de radio el número imaginario Ri, tendría curvatura

$$1/(Ri)^2 = -1/R^2,$$

[15] En este trabajo hablaremos del *Disquisiciones* para referirnos al *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, y no, como es habitual, al *Disquisitiones Arithmeticae*.

[16] Investigaciones sobre temas de alta geodesia, primer trabajo y segundo trabajo.

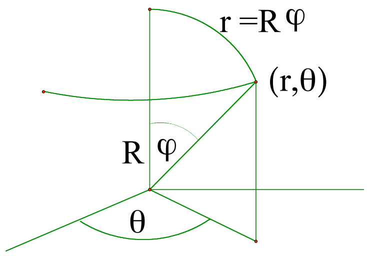
y, por lo tanto, lo que se debe encontrar es una superficie de curvatura constante negativa.

5.1. La analogía diferenciable

Recordemos que el elemento de longitud de la esfera de radio R está dado por

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2,$$

donde r, θ son coordenadas polares sobre la esfera. De hecho, θ es la longitud y $r = R\varphi$, donde φ es la colatitud.



Cuando hablamos de extender la analogía de Lambert a la geometría diferencial nos referimos a que es natural preguntarse por la existencia de una superficie con elemento de longitud

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(\frac{r}{R})\, d\theta^2\,,$$

obtenido a partir del ds^2 de la esfera de radio R, cambiando R por Ri.

5.2. Disquisitiones generales circa superficies curvas

Ya hemos visto cómo Gauss, motivado por problemas geodésicos, había estudiado las representaciones conformes entre superficies, y muy especialmente las representaciones conformes entre una esfera y el elipsoide terrestre o entre este elipsoide y el plano. Durante este período, que va aproximadamente de 1812 a 1826, estudia también las geodésicas del elipsoide. Ver *Erdellipsoid und geodätische linie*, página 65 del Vol. IX de [9].

Todo esto le motiva a estudiar superficies desde un punto de vista más general. En una carta a Schumacher (21 − 11 − 1825) dice

> *Recientemente he retomado parte de mis investigaciones sobre superficies curvas, que habrán de formar la base de mi proyectado ensayo en geodesia avanzada [...] Desafortunadamente, me encuentro que debo ir muy atrás en la exposición porque incluso lo que es conocido, se debe desarrollar de una manera distinta, adecuada a las nuevas investigaciones.*

A partir de aquí redacta una primera versión del *Disquisiciones* que no llega a publicar. La podéis encontrar brevemente comentada en [22], y completa en [9]. La segunda versión se publica en 1828, ved [8].

Esquemáticamente, digamos que el *Disquisiciones* tiene (sólo) unas 40 páginas, y está dividido en 29 secciones. Contiene cinco nuevos (?) conceptos, y unos 10 teoremas. Sólo cita al *"ill. Euler"* (§8), y al *"clar. Legendre"* (§27). La única superficie que aparece es la esfera (a pesar de que ya se conocían superficies tan interesantes como el helicoide y la catenoide, atribuidas a Euler y Meusnier, respectivamente). También se habla, en la penúltima sección, de "la superficie de la tierra".

Los cinco nuevos conceptos a los que nos referíamos, junto con las secciones en las que aparecen, son:

§6. Aplicación de Gauss.

§6. Curvatura de Gauss.

§6. Curvatura total.

§18. Transporte paralelo (variación angular).

§19. Coordenadas abciso-geodésicas ortogonales.

El nombre "abciso-geodésicas" es de Gauss, pero no en el *Disquisiciones*, ver [5].

Y algunos de los resultados más importantes son:

§7. $k = \det \Phi_2 / \det T_2$. Primer cálculo de la curvatura.

§8. $k = k_1 \cdot k_2$. Segundo cálculo de k.

§12. Teorema Egregio. Tercer cálculo de k.

§15. Lema de Gauss.

§19. $k = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr}, \quad \frac{d\gamma}{d\theta} = -(\sqrt{G})_r$. Cuarto cálculo de k.

§20. Teorema del defecto.[17]

§27. $A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2k(A) + k(B) + k(C))$.

[17] Hoy día, el teorema del defecto es un caso particular del teorema de Gauss-Bonnet.

En la sección siguiente los comentamos todos ellos con un poco más de detalle[18].

5.3. Breve resumen del Disquisiciones

§2. Trigonometría esférica.

Para nosotros esta sección es fundamental,[19] porque da soporte a nuestra conjetura. En efecto, Gauss reconstruye la geometría de la esfera por un camino analítico, sin recorrer a dibujos o figuras, ya que este es el único camino generalizable posteriormente a la esfera imaginaria, y la única manera de presentar la geometría hiperbólica de manera consistente e inatacable.

El punto central de la sección es el siguiente teorema que engloba todas las fórmulas de la trigonometría esférica.

Teorema. *Si L, L', L'', L''' denotan cuatro puntos de la esfera, y A denota el ángulo entre los arcos LL', $L''L'''$ en su punto de intersección, tendremos*

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A.$$

§6. Curvatura.

Define la aplicación de Gauss $\gamma : S \to \mathbb{S}^2$ entre la superficie S y la esfera unidad $\mathbb{S}^2$, que asocia a cada punto de la superficie su vector normal, y se extiende en consideraciones sobre el signo y la multiplicidad de la región de esfera cubierta por esta aplicación.

A partir de la aplicación γ define *curvatura total* o integral de una parte de la superficie como el área de la imagen esférica de esta parte de superficie y define *medida de curvatura* como el límite

$$k(P) = \lim_{S \to P} \frac{\text{Área de } \gamma(S)}{\text{Área de } S}.$$

Observamos que, en el lenguaje propio del análisis, lo que está diciendo es que la curvatura es el Jacobiano de la aplicación de Gauss.

§7. Cálculo de la curvatura.

Calcula la curvatura de una superficie dada como la gráfica de una función. Si la superficie es $z = z(x, y)$, denota las derivadas parciales primeras y segundas por

$$t = z_x, \quad u = z_y, \quad T = z_{xx}, \quad U = z_{xy}, \quad V = z_{yy},$$

[18] Podéis consultar también la excelente conferencia de Pere Pascual [17].

[19] Spivak, en [24], dice: *Esta sección se puede omitir completamente*. La justificación de Spivak es clara: ninguno de los resultados de la sección §2 es usada más adelante. Pero nosotros tenemos otro punto de vista. De hecho, aparece el ángulo de inclinación de una geodésica, un concepto que será muy importante en el *Disquisiciones*.

y obtiene la expresión

$$k \;=\; \frac{TV - UU}{(1 + tt + uu)^2}\,,$$

que, en lenguaje moderno, dice que

$$k = \frac{\det \Phi_2}{\det T_2},$$

donde T_2 es la primera forma fundamental, y Φ_2 es la segunda forma fundamental.

§8. *Curvatura de Euler.*

Demuestra el resultado siguiente.

Teorema. *La medida de curvatura en cualquier punto de la superficie es igual a una fracción que tiene por numerador la unidad, y por denominador el producto de los dos radios de curvatura extremos de las secciones por planos normales.*

Justo antes dice: *Estas conclusiones contienen casi todo lo que el ilustre Euler fue el primero de probar sobre curvatura de superficies curvas.*

Pero en cambio, no hace ninguna referencia a Olinde Rodrigues, (1794−1851), quien, en el trabajo [20], ya hablaba de lo que ahora conocemos como *aplicación de Gauss* y *curvatura de Gauss*, demostraba la fórmula $k = k_1 \cdot k_2$ y lo que hoy conocemos como teorema de Olinde Rodrigues.

Todo esto pasaba diez años antes de la primera versión no publicada del *Disquisiciones* y trece antes de la publicación de la segunda versión. Por tanto, la prioridad en la publicación a Olinde se le debería de reconocer más universalmente.

§11. *Teorema Egregio.*

En esta sección demuestra la extraordinaria fórmula

$$\begin{aligned}
4 \quad & (EG - FF)^2\, k = E\Big(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \Big(\frac{dG}{dp}\Big)^2\Big) \\
+ \quad & F\Big(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\Big) \\
+ \quad & G\Big(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \Big(\frac{dE}{dq}\Big)^2\Big) \\
- \quad & 2(EG - FF)\Big(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp\cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2}\Big)\,,
\end{aligned}$$

donde k es la curvatura y E, F, G son los coeficientes de la métrica, que se expresan en función de coordenadas arbitrarias p, q.

La manipulación genial de las ecuaciones podría tal vez explicarse por el hecho de que Gauss conocía ya esta fórmula para coordenadas isotermales y para coordenadas polares (última fórmula de la versión de 1825). Pero la demostración no es, por lo menos no lo parece, un simple cambio de coordenadas.

§12. *Teorema Egregio.*

Como consecuencia inmediata de la anterior fórmula, dice: *Formula itaque art. prae. sponte perducit ad egregium*

THEOREMA *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariate manet.*

Que una superficie se pueda desarrollar (explicatur) sobre otra significa que hay una isometría entre ellas.

Como un corolario del teorema egregio se deduce que si una superficie es desarrollable sobre el plano, entonces tiene curvatura cero. Euler había dado una prueba de este resultado, ver [7], pero según Gauss, su prueba no era satisfactoria. Justamente es en este artículo de Euler donde se introduce el concepto de superficie desarrollable. Ver [22].

§15. *Lema de Gauss.*

Demuestra el resultado siguiente.

TEOREMA. *Si sobre una superficie curva se dibujan desde el mismo punto inicial un número infinito de líneas más cortas de igual longitud, las líneas que unen sus extremidades serán normales a cada una de las líneas.*

Una vez demostrado comenta: *Hemos pensado*[20] *que vale la pena deducir este teorema a partir de la propiedad fundamental de las líneas más cortas: pero la verdad del teorema se hace evidente sin ningún cálculo mediante el siguiente razonamiento...*

§18. *Geodésicas y ángulo de inclinación.*

En esta sección obtiene la ecuación diferencial de las geodésicas en función del ángulo de inclinación. Por ángulo de inclinación entendemos el ángulo que forma, en cada punto, la geodésica con una de las líneas coordenadas.

Concretamente, si tenemos un sistema de coordenadas p, q y denotamos por γ el ángulo que forma la geodésica con las líneas coordenadas $q = constante$, se cumple que

$$\sqrt{EG - FF} \cdot d\gamma = \frac{1}{2}\frac{F}{E} \cdot dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} \cdot dp - \frac{dF}{dp} \cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq\,.$$

Es remarcable que Gauss comente que de aquí se deduce una ecuación diferencial de segundo orden para las geodésicas, justamente la que habitualmente se da en la actualidad en muchos libros de texto, pero añade: "*sería más complicada y menos útil...*"

[20] Un comentario que vuelve a revelar el interés de Gauss en encontrar demostraciones analíticas en vez de geométricas, a pesar de que estas sean evidentes. Esta actitud se entiende si aceptamos la hipótesis de que el *Disquisiciones* es parte de su investigación sobre el quinto postulado y desarrolla el programa analítico de Lambert, ver [22].

§19. *Derivada del ángulo de inclinación.*

La anterior fórmula, para el caso particular de coordenadas abciso-geodésicas ortogonales, es decir, $E = 1, F = 0$, nos dice que

$$\frac{d\gamma}{dq} = -\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{G(p,q)}\,.$$

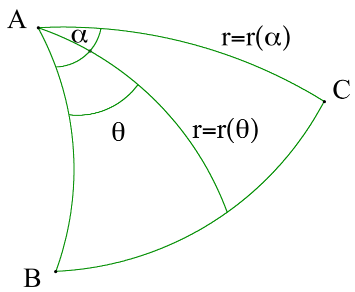
En esta misma sección también se da cuenta de que la fórmula general de la curvatura en función de los coeficientes de la métrica, la impresionante fórmula de la sección §11 del Disquisiciones, en coordenadas abciso-geodésicas ortogonales se escribe simplemente como[21]

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial p^2}\,,$$

donde, tanto k como G, son funciones de p y q.

§20. *Teorema del defecto.* Consideremos un triángulo descrito en coordenadas polares (r,θ), caso particular de coordenadas abciso-geodésicas ortogonales con $p = r$ y $q = \theta$, por las ecuaciones

$$0 \le \theta \le \alpha, \quad 0 \le r \le r(\theta).$$



Integramos la fórmula

$$k\sqrt{G} = -\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}\,.$$

Para un valor fijado de θ integramos respecto de r entre 0 y $r(\theta)$. Obtenemos

$$\int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr = \left[-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right]_0^{r(\theta)} = 1 - \frac{d}{dr}\sqrt{G}.$$

Integrando ahora respecto de θ, entre 0 y α, obtenemos

[21]Esta es la última fórmula del *Disquisiciones* de 1825, pero no la deducía allí de la fórmula general de la sección §11 del Disquisiciones, que aún no conocía.

$$\int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = \alpha - \int_0^\alpha \frac{d}{dr}\sqrt{G}\, d\theta,$$

que, por la fórmula de la sección §19 del Disquisiciones y la condición $\gamma(0) = \pi - \beta$, nos da,

$$\int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} k\sqrt{G}dr\, d\theta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

Equivalentemente, como el elemento de área sobre la superficie está dado por $d\sigma = \sqrt{G}dr\, d\theta$, tenemos

$$\int_T k\, d\sigma = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi,$$

donde T es el triángulo anterior. Esto es exactamente el teorema del defecto, que podemos enunciar simplemente diciendo: *La curvatura total de un triángulo (que es igual al área de su imagen esférica por la aplicación de Gauss) es igual a su defecto.*

Destaquemos que a partir del teorema egregio, integrando dos veces, hemos obtenido el teorema del defecto. Pero el orden del descubrimiento fue el inverso, se demostró primero el teorema del defecto y, derivando dos veces, se llegó al teorema egregio (pero esto fue en la versión no publicada de 1825), ver [22].

Pero la demostración del teorema del defecto de 1825 no le satisface, y comenta: *Esta prueba necesitará explicación y algún cambio en su forma.*

Esto le lleva a reescribirlo todo y a la versión del 1827.

§24. *Área de un triángulo*

En esta sección da una fórmula aproximada para el área de un triángulo rectángulo sobre una superficie. Esta fórmula la generaliza a triángulos arbitrarios en la sección siguiente.

§26. *Teoremas de comparación.*

Considera el triángulo plano de lados de igual longitud que los lados de un triángulo curvilíneo dado sobre la superfície, y compara los ángulos A, B, C de este triángulo curvilíneo con los ángulos respectivos A^*, B^*, C^* del triángulo plano. Obtiene el resultado siguiente.

$$\begin{aligned}
A^* &= A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C)) + \text{términos de orden superior},\\
B^* &= B - \frac{\sigma}{12}(k(A) + 2k(B) + k(C)) + \text{términos de orden superior},\\
C^* &= C - \frac{\sigma}{12}(k(A) + k(B) + 2k(C)) + \text{términos de orden superior},
\end{aligned}$$

donde σ es el área del triángulo $\triangle ABC$, $k(A)$ es la curvatura de la superficie en el vértice A, y A^* es el ángulo del triángulo plano de lados de igual longitud que los lados del triángulo sobre la superficie, correspondiente al ángulo A. Análogamente para B y C.

Estos "términos de orden superior" a qué nos referimos involucran los coeficientes del desarrollo de Taylor de los coeficientes de la métrica.

§27. *Teoremas de comparación en la esfera.*

Las anteriores fórmulas, en el caso particular en que la superficie de partida es una esfera de radio R, quedan reducidas a

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2}, \quad B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2}, \quad C^* = C - \frac{\sigma}{3R^2}.$$

Gauss reconoce la prioridad de estas fórmulas a Legendre (1752 – 1833). Observamos que si las sumamos obtenemos el teorema del defecto sobre la esfera:

$$\pi = A + B + C - \frac{\sigma}{R^2}.$$

§28. *BHI.*

Como esta sección es muy corta y ha sido tan y tan comentada[22], la reproducimos en su totalidad.

Nuestras fórmulas generales, si despreciamos los términos de cuarto orden, quedan extremadamente simples, concretamente:

$$\begin{aligned} A^* &= A - \frac{\sigma}{12}(2k(A) + k(B) + k(C)) \\ B^* &= B - \frac{\sigma}{12}(k(A) + 2k(B) + k(C)) \\ C^* &= C - \frac{\sigma}{12}(k(A) + k(B) + 2k(C)) \end{aligned}$$

Así, a los ángulos A, B, C sobre una superficie no esférica, se les debe aplicar reducciones diferentes, para que los senos de los ángulos modificados sean proporcionales a los lados opuestos. La desigualdad, genéricamente hablando, será de tercer orden; pero si la superficie difiere poco de una esfera, la desigualdad será de orden superior. Incluso en los grandes triángulos de la superficie de la tierra, de los que podemos medir sus ángulos, la diferencia es siempre inapreciable. Así, por ejemplo, en el triángulo más grande que hemos medido estos últimos años, concretamente, el formado por los puntos Hohehagen[23], Brocken, Inselsberg, donde el exceso de la suma de los ángulos era = $14''$,85348*, el cálculo ha*

[22]El mito de Gauss. La discusión proviene de si Gauss medía este triángulo para saber la curvatura del universo. Parece que un comentario de Sartorius, poco después de la muerte de Gauss, llevó a esta hipótesis. Nosotros no lo creemos así y pensamos que, en todo caso, lo que preocupaba a Gauss en aquellos momentos era la curvatura de la tierra y no la del universo. Gauss nunca dijo tal cosa. Ver, por ejemplo, [3, 15, 11, 23].

[23]Actualmente escrito Hohenhagen. Las altitudes de estos tres puntos son, Hohenhagen 508 m, Brocken 1146 m, Inselsberg 916 m.

dado las siguientes reducciones para ser aplicadas a los ángulos:

$$\begin{array}{lll} \textit{Hohehagen} & \ldots & -4'',95113 \\ \textit{Brocken} & \ldots & -4'',95104 \\ \textit{Inselsberg} & \ldots & -4'',95131 \end{array}$$

Observemos que si estuviéramos sobre una esfera, el exceso 14″,85348, se debería dividir por igual entre los tres ángulos, y la corrección seria de

$$\frac{14{,}85348''}{3} = 4'',95116,$$

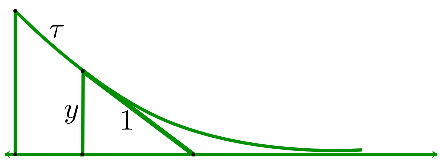
extraordinariamente próxima a las tres correcciones anteriores.

6. Geometría diferencial y geometría no euclidiana

Vamos a encontrar, en el mundo de la geometría diferencial, la esfera imaginaria. De esta manera habremos justificado la "trampa" de cambiar R por Ri que hacemos en la analogía.

Empecemos recordando que la tractriz es la curva que describe un cuerpo situado en el punto $(0, 1)$ al ser arrastrado desde el punto $(0, 0)$ sobre el eje de las $x > 0$.

Fue un problema propuesto por Perrault, en el siglo XVII, y resuelto por Huygens.



A partir de esta figura se ve inmediatamente que la tractriz es una curva con subtangente 1, ya que el segmento de tangente entre el punto de contacto y el eje de las x coincide con la cuerda que une el objeto con la persona que lo arrastra.

Hagamos girar esta curva alrededor del eje de las x. Tendremos una superficie de revolución, que podemos parametrizar por las coordenadas (t, y), donde t es el ángulo de rotación y $y = e^{\tau}$, siendo τ el parámetro arco (distancia) de la tractriz, contado a partir del punto $(0, 1)$.

Esta superficie se llama *pseudoesfera*, y fue descubierta por F. Minding,[24] en

[24]Minding fue el primer estudioso del *Disquisiciones* y fundador de la escuela de geometría diferencial rusa. Introdujo el concepto de curvatura geodésica de una curva sobre una superficie el 1830. La pseudoesfera la introdujo el 1839 en el artículo [16]. No obstante, la relación entre la pseudoesfera y el plano hiperbólico (es decir, entre las superficies de curvatura constante negativa y la geometría hiperbólica) no se hizo, a pesar de que el año 1837, y en la misma revista donde publicó Minding, apareció publicado el trabajo de Lobatchevski [13]. Ver [22].

1839.

En estas coordenadas es fácil ver que la métrica de la pseudoesfera se escribe como

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dt^2 + dy^2).$$

Cuando t varia entre $-\infty$ y $+\infty$, y $y > 0$, la métrica anterior es la métrica del semiplano de Poincaré. Pero nosotros tenemos que t varia entre 0 y 2π, y $y > 1$. Es decir, tenemos un trozo (carta local) del semiplano de Poincaré.

Destaquemos, finalmente, que la anterior métrica escrita en coordenadas polares geodésicas, se escribe como

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2,$$

es decir, *la métrica de la pseudoesfera es, localmente, la métrica de la esfera imaginaria.*

7. El genio más grande

Nos estamos refiriendo a János Bolyai.

En un cuaderno de cuando tenía 18 años (1820) y estaba en la Academia de Ingeniería de Viena, bajo el título *Parallellarum theoria*, se encuentran los siguientes dibujos.

El primero de ellos representa diversas circunferencias de radios cada vez mayores y que tienen el centro cada vez más lejos de la línea vertical. La línea a la que se aproximan estas circunferencias es la línea vertical en geometría euclidiana (circunferencia de radio infinito), o bien el horociclo, en geometría hiperbólica (circunferencia de centro y radio infinito). Es la figura fundamental de la geometría hiperbólica.[25] En el trabajo de Bolyai es esencial la consideración de la horoesfera (el análogo tres dimensional del dibujo que estamos considerando), subconjunto del espacio hiperbólico donde es válida la geometría euclidiana.

[25] Se puede encontrar un estudio explícito en [18].

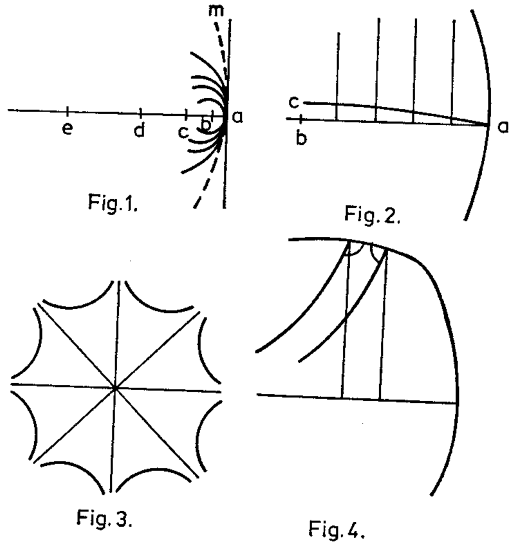
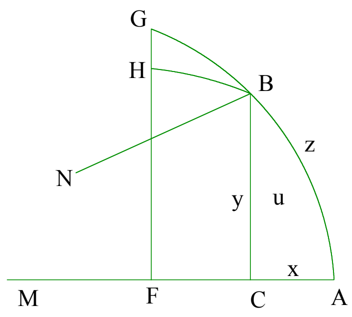


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

En la sección 32 de su famoso *Apéndice*[26] considera la curva AB de ecuación $y = y(x)$, en coordenadas abciso-geodésicas ortogonales x, y (fija la geodésica AM, y dice que B tiene coordenadas (x, y) cuando x es la distancia entre A y el pie C de la perpendicular de B a AM; y y es la distancia entre el punto B y la recta AM), y se propone calcular su longitud.

Obtiene la relación siguiente.

$$\frac{dz^2}{dy^2 + \overline{BH}^2} \doteq 1$$



Pero él mismo ha calculado antes el valor de la equidistante $\overline{BH}$, de manera que obtiene

[26]Hemos comentado este trabajo más explícitamente en [22] y en [19]. Ver [2,12, 10, 1].

$$dz^2 \doteq \cosh^2 \frac{y}{R} dx^2 + dy^2.$$

El conocimiento del elemento de longitud, es decir, de la métrica, le permite hacer *geometría diferencial*, y, en el mismo §32 calcula el elemento de área, el área del círculo, el área de la esfera, volúmenes, comenta que se pueden calcular curvaturas, evolutas, etc.

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} d\alpha^2.$$

Reproducimos la versión original de Bolyai donde se puede ver la primera métrica Riemanniana de la historia.

adeoque tang *hba*: eritque (cum *hbc* manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $\doteq R$ sit), *tangens* in *b* ipsius *bg* per *y* determinata.

II. Demonstrari potest, esse $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \sim 1$;

Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde *z* integratione (per *x* expressum) reperitur. Et potest lineae cuiusvis *in concreto datae* aequatio in *S* inveniri, e. g. ipsius

Pensamos que Gauss tenía forzosamente que reconocer, en esta fórmula, la expresión del elemento de longitud hiperbólico.

Conjeturamos que justamente esto le hizo desistir en su proyecto de redactar un trabajo sobre teoría de las paralelas. En 1831 dice *No quisiera que esto muriese conmigo*, y en 1832 abandona el proyecto. Ver la carta a Schumacher y el comentario posterior que hacemos. János Bolyai acaba de construir la esfera imaginaria sintéticamente. Creemos que es el primer ejemplo de una variedad de Riemann de dimensión dos que no es una superficie de $\mathbb{R}^3$.

El obstáculo que tuvo Gauss es que buscó la esfera imaginaria en el espacio euclidiano.

Bibliografía

[1] J. Bolyai, *Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta*

ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica, Polygon, Szeged, 2002, contiene una traducción al húngaro de Rados Ignácz, 1897, y una al inglés, de George Bruce Halsted, 1897.
[2] R. Bonola, *Non euclidean geometry. A Critical and Historical Study of its Development*, Dover, 1955, primera edición de 1912. Contiene la traducción del Apéndice de J. Bolyai, y de La teoría de las paralelas de N. I. Lobatchevski.
[3] E. Breitenberger, *Gauss's geodesy and the axiom of parallels*, Arch. Hist. Exact Sci. 31 (1984), 273289.
[4] S. Burris, *Gauss and non-euclidean geometry*, Crash Course Notes, Waterloo (2003), 1-18, http://www.math.uwaterloo.ca/ snburris/htdocs/noneucl.pdf.
[5] P. Dombrowski, *150 years after Gauss'"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, Astèrisque 62 (1979), 97-153, contiene la versión original de Gauss en latín: Disquisitiones generales circa superficies curvas.
[6] W. G. Dunnington, *Carl Friederich Gauss. Titan of Science*, The Mathematical Association of America, 2004, con material adicional de J.Gray y Fritz-Egbert Dohse.
[7] L. Euler, *De Solidis quorum supericiem in planum explicare licet*, Novi Comentarii Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae XVI (1772), 3-34, Opera Omnia I, 28.
[8] C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes societatis regiae scientarum Gottingensis recentiores classis mathematicae VI (1828), 99-146, presentado el 8 de Octubre de 1827. Ver también [9], vol IV, pág. 217-258.
[9] C. F. Gauss, *Werke*, vol. 1-12, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig, 1870-1927, se pueden consultar también en http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D38910.html.
[10] J. Gray, *János Bolyai. Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space*, Burndy Library Publications, New Series, Number I, 2004.
[11] G. Goe, B. L. van der Waerden, A. I. Miller, *Comments on Miller's "The Myth of Gauss'Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space"*, Isis 65 (1974), 8387.
[12] F. Kárteszi, *Bolyai, János. Appendix. The theory of space*, vol. 138, North-Holland Mathematics Studies, 1987, con un suplemento a cargo de Barna Szénássy.
[13] N. I. Lobatchevski, *Géométrie imaginaire*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik 17 (1837), 295-320.
[14] J. Lutzen, *Joseph Liouville 1809-1882. Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer Verlag, 1990.
[15] A. Miller, *The Myth of Gauss'Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space*, Isis 63 (1972), 345-348.
[16] F. Minding, *Wie sich entscheiden lasst, ob zwei gegebene krumme Flachen auf einander abwickelbar sind, oder nicht; nebst Bemerkungen uber die Flachen*

von unveranderlichem Krummungsmaasse, Journal fur die reine und angewandte Mathematik 19 (1839), 370-387, Com decidir si dues superfícies són mútuament desenvolupables; incloent remarques sobre superfícies de curvatura constant negativa.

[17] P. Pascual, *Geometria de Superfícies. Una aproximació a la figura de Gauss*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques (2006).

[18] A. Reventós, *Geometria Integral Hiperbólica*, Diversitas. Universidad de Girona 34 (2002), 113-130, homenaje al profesor Lluís Santaló i Sors.

[19] A. Reventós, *Un nou món creat del no-res, un món on es pot quadrar el cercle!*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 19/2 (2004), 47-83, también: Conferència de Sant Albert, Facultat de Ciències de la UAB, 17 de noviembre de 2004. Dipòsit legal B.44.926-2004.

[20] O. Rodrigues, *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une class d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie*, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique 3 (1815), 162-182.

[21] C. J. Rodriguez, *La esfera imaginaria*, Publicacions del Departament de Matemàtiques, UAB (2005), 1-33.

[22] A. Reventós, C. J. Rodríguez, *Una lectura del Disquisitiones generales circa superficies curvas de Gauss*, Societat Catalana de Matemàtiques, 2005, contiene la traducción al catalán de esta obra de Gauss.

[23] E. Scholz, *Carl F. Gauss, "el gran triángulo" y los fundamentos de la geometría*, La Gaceta de la RSME 8.3 (2005), 638-712.

[24] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry*, Publish or Perish, Inc. Berkeley, 1979, segunda edición, cinco volúmenes.

Agustí Reventós, Carlos J. Rodríguez
Universitat Autónoma de Barcelona
Departamente de Matemàtiques
08193 Bellaterra, Cerdanyola del Vallès, Barcelona
e-mail: ***agusti@mat.uab.es,crodri@mat.uab.es***
http://mat.uab.es/~agusti/